| | |
|---|---|
| **Elektrodynamik** | Institut für Theoretische Physik |
| Wintersemester 2023/24 | Prof. Dr. M. Vojta & Dr. M. Haque |

## 9. Übung

Besprechung: Woche vom 11.12.2023 bis 15.12.2023

Aufgabe 26 Maxwell'scher Spannungstensor [Punkte: 2+1 =3]

Ein unendlich ausgedehnter Plattenkondensator trägt auf seiner unteren Platte (bei $z = -d/2$) die Ladungsdichte $-\sigma$, die obere Platte (bei $z = +d/2$) trägt die Ladungsdichte $+\sigma$.

**(a)** Bestimmen Sie alle neun Elemente des Spannungstensors im Gebiet zwischen diesen Platten. Stellen Sie Ihre Antwort als 3×3-Matrix dar: $\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$.

**(b)** Bestimmen Sie die Kraft pro Flächeneinheit auf der oberen Platte.

*Hintergrund:*
Das elektromagnetische Feld trägt Energie, Impuls, und Drehimpuls.

Im statischen Fall kann die elektromagnetische Kraft auf eine Ladungsverteilung vollständig durch den Spannungstensor an den Randflächen ausgedrückt werden.

Der Spannungstensor ist

$$T_{ij} \;=\; \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0^{-1} B^2)\delta_{ij} - \epsilon_0 E_i E_j - \mu_0^{-1} B_i B_j$$

oder

$$\overleftrightarrow{T} \;=\; \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0^{-1} B^2)\mathbf{I} - \epsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E} - \mu_0^{-1} \vec{B} \otimes \vec{B}.$$

Achtung: Viele Lehrbücher verwenden das umgekehrte Vorzeichen für den Spannungstensor. Wir folgen der oben verwendeten Vorzeichenkonvention, wie sie in der Vorlesung verwendet wird.

Mit dieser Konvention: Die durch ein (gerichtetes) Flächenelement $\vec{df} = df\vec{n}$ wirkende Kraft ergibt sich durch Anwendung des Spannungstensors in der Form $-\overleftrightarrow{T} \cdot \vec{df}$ (oder in der Komponentenform: $-T_{ij} n_j df$).

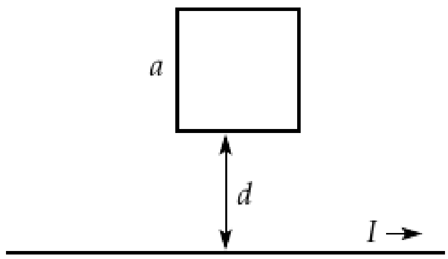
Aufgabe 27 Induktion [Punkte: 2+(1+0) =3]

Eine quadratische Leiterschleife (Seitenlänge $a$) liegt im Abstand $d$ parallel zu einem unendlich langen Leiter, der den Strom $I$ führt.

**(a)** Berechnen Sie den magnetischen Fluss durch die Leiterschleife.

**(b)** Wie groß ist die in der Leiterschleife induzierte Spannung, wenn sie mit konstanter Geschwindigkeit $v$ vom geraden Leiter weggezogen wird?

In welche Richtung fließt der induzierte Strom, im oder gegen den Uhrzeigersinn?




Aufgabe 28 Induktion: lange Spule [Punkte: 3+1+(1+2) =7]

Durch eine unendlich lange eng gewundene Spule ($n$ Windungen pro Längeneinheit, Spulenradius $R$, Figurenachse= $z$-Achse) fließt ein allmählich anwachsender Strom: $I(t) = \alpha t$.

*Hinweise:*

1⟩ Verwenden Sie in Integralform die Maxwell-Gleichung für die Rotation des elektrischen Feldes (rot $\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$).

2⟩ Das Magnetfeld aufgrund eines zeitunabhängigen Stroms $I$ durch eine lange Spule ist innerhalb der Spule gleichmäßig ($B = \mu_0 n I$) und außerhalb der Spule vernachlässigbar ($B = 0$). Für den zeitabhängigen Fall hier benutzen wir die quasistatische Näherung: wir nehmen an, dass das Magnetfeld zu jedem Zeitpunkt durch den Strom zu diesem Zeitpunkt bestimmt wird: $B(t) = \mu_0 n I(t)$.

**(a)** Berechnen Sie das induzierte elektrische Feld im Abstand $s$ von der Spulenachse, innerhalb ($s < R$) und außerhalb ($s > R$) der Spule.

**(b)** Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung des Poyntingvektors an der zylindrischen Oberfläche (bei $s = R$).

**(c)** Stellen Sie sich eine zylindrische Oberfläche vor, die koaxial zur Spule ist und eine Höhe $h$ (die z. B. zwischen $z = 0$ und $z = h$ liegt) und denselben Radius $R$ wie die Spule hat.

Berechnen Sie den Energiestrom, der in den von dieser Fläche umschlossenen Bereich fließt.

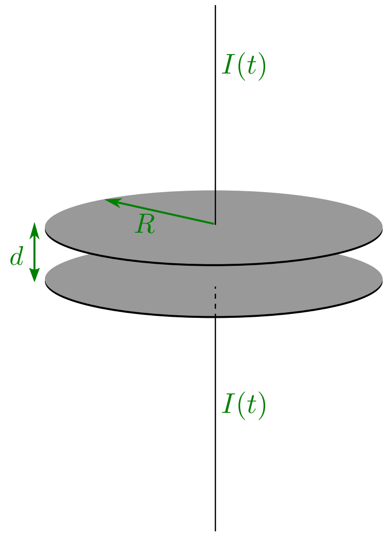
Berechnen Sie die Feldenergie, $W_{\text{el}}(t)$ und $W_{\text{mag}}(t)$, die in diesem zylindrischen Bereich gespeichert ist. Vergleichen Sie die Änderungsrate von $W_{\text{elmag}}(t) = W_{\text{el}}(t) + W_{\text{mag}}(t)$ mit dem Energiestrom.

Aufgabe 29 Maxwell'scher Verschiebungsstrom: Plattenkondensator [Punkte: 2+2+(2+1) =7]

Wir betrachten einen Plattenkondensator:
Plattenabstand $d$, Radius $R$, Figurenachse = $z$-Achse, Ursprung am Mittelpunkt zwischen den Platten.
Randeffekte sollen vernachlässigt werden ($d \ll R$).
Benutzen Sie Zylinderkoordinaten $(s, \phi, z)$.
Wir nehmen an, dass die Leitungen entlang der $z$-Achse über und unter dem Kondensator unendlich lang sind.

Der Plattenkondensator ist an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen, sodass sich auf der unteren Platte die Ladung $Q_1(t) = Q_0 \cos(\omega t)$ befindet (mit $Q_0 > 0$), auf der oberen $Q_2(t) = -Q_1(t)$.

Die zylinderförmige Region ($s < R$, $|z| < d/2$) zwischen den Platten hat Radius $R$ und Höhe $d$.




**(a)** Berechnen Sie das elektrische Feld und das Magnetfeld in der Region zwischen den Platten ($s < R$, $|z| < d/2$).

**(b)** Berechnen Sie das elektrische Feld und das Magnetfeld außerhalb dieser Region.
Ihre Antwort sollte beide Fälle $|z| < d/2$ und $|z| > d/2$ behandeln.

**(c)** Bestimmen Sie den Energiestrom, der durch die Mantelfläche des Zylinders fließt.
Vergleichen Sie mit der elektrischen Leistung, welche die Spannungsquelle liefert.