

12. Übung

Besprechung: Woche vom 15.01.2024 bis 19.01.2024

Aufgabe 37 Wellenausbreitung in elektrischen Leitern / im Elektronengas

[Punkte: 2+1+2+2+2 =9]

Eine elektromagnetische Welle breitet sich in einem leitenden Medium (Leitfähigkeit σ) aus. Der elektrische Leiter ist homogen, isotrop, und ladungsfrei. Einfachheitshalber nehmen wir an, dass die Dielektrizitätskonstante und Permeabilität dieselben sind wie im Vakuum. Mit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0; & \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\dot{\vec{B}}; & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}}. \end{aligned}$$

- (a) Die Wellengleichungen für die Felder sind modifiziert (im Vergleich zum Vakuum). Leiten Sie die modifizierten Wellengleichungen ('Telegraphengleichungen') her.
- (b) Finden Sie das Dispersionsgesetz, d.h. den Zusammenhang zwischen der Wellenzahl k und der Kreisfrequenz ω der ebenen Welle in der Form

$$k^2 = f(\omega).$$

- (c) In einem Elektronengas mit der Teilchendichte n_0 betrachten wir die Bewegung der Elektronen in dem Feld $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ unter Vernachlässigung von Kollisionen und der vom Magnetfeld auf das Elektron ausgeübten Lorentz-Kraft. Berechnen Sie die Leitfähigkeit σ des Elektronengases.

Jedes Elektron hat Masse m und Ladung $-e$.

Hinweis: Die Leitfähigkeit ist imaginär.

- (d) Berechnen Sie die kritische Frequenz ω_p für die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle im Elektronengas.

Hinweis: Für Ausbreitung muss $k^2 > 0$ gelten.

- (e) Berechnen Sie die Eindringtiefe für eine niederfrequente Welle ($\omega \ll \omega_p$) im Elektronengas.

Aufgabe 38 Plattenkondensator mit Dielektrikum (II)

[Punkte: 1+1+1+1+2 =6]

Der Raum zwischen den Platten eines Plattenkondensators ist mit zwei Schichten linearer dielektrischer Materialien gefüllt. Jede Schicht hat die Dicke a , daher beträgt der Gesamtabstand der Platten $2a$. Die Dielektrizitätskonstante (Permittivität) der Schicht 1 beträgt $\epsilon = 2\epsilon_0$, die der Schicht 2 beträgt $\epsilon = 1.5\epsilon_0$. Die Dichte der freien (makroskopischen) Ladungen auf der oberen (bzw. unteren) Platte ist $+\sigma$ (bzw. $-\sigma$).



- (a) Bestimmen Sie die elektrische Verschiebung \vec{D} in jeder Schicht.
- (b) Bestimmen Sie das elektrische Feld \vec{E} in jeder Schicht.
- (c) Bestimmen Sie die Polarisation \vec{P} in jeder Schicht.
- (d) Bestimmen Sie die Potentialdifferenz zwischen den Platten.
- (e) Bestimmen Sie Ort und Betrag aller Polarisationsladungen.

Aufgabe 39 Zirkular polarisierte Welle

[Punkte: 1+1+3 =5]

Eine zirkular polarisierte monochromatische elektromagnetische Welle wird durch das Feld

$$\vec{E} = E_0 [\cos(kz - \omega t) \vec{e}_x + \sin(kz - \omega t) \vec{e}_y]$$

beschrieben. Das tragende Medium ist ungeladen und nichtleitend, mit Permittivität $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ und Permeabilität $\mu = \mu_0 \mu_r$.

- (a) Berechnen Sie das Magnetfeld.
- (b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor \vec{S} .
- (c) Berechnen Sie den Strahlungsdruck auf eine um den Winkel θ gegen die Ausbreitungsrichtung geneigte Ebene.

Hinweise: (1) Die Dichte des Feldimpulses ist $\frac{1}{u^2} \vec{S}$, wobei $u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ die Phasengeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle ist.

(2) Es könnte hilfreich sein, zunächst den Fall $\theta = 0$ zu betrachten.