Elektrodynamik	Institut für Theoretische Physik
Wintersemester 2023/24	Prof. Dr. M. Vojta & Dr. M. Haque

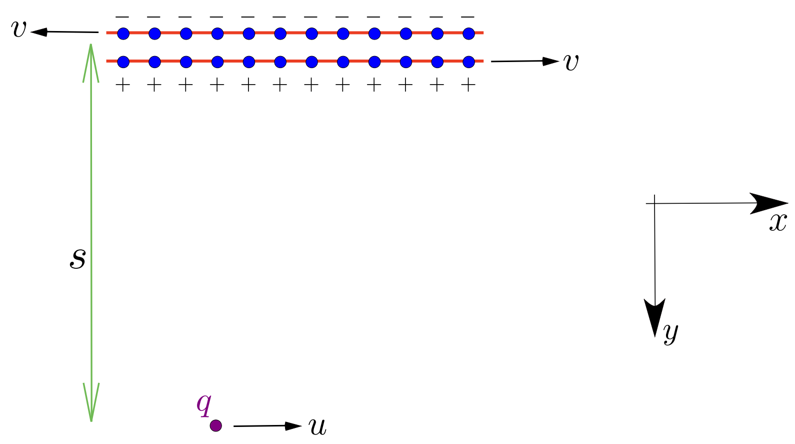
14. Übung

Besprechung: Woche vom 29.01.2024 bis 02.02.2024

Aufgabe 43 Elektromanetische Kräfte in zwei Bezugssystemen [Punkte: 2+2+1+2+2 = 9]

In dieser Aufgabe analysieren wir wie ein elektromagnetisches Phänomen in zwei verschiedenen Inertialsystemen aussieht.

Eine unendlich lange, positiv geladene Kette mit Linienladungsdichte λ bewegt sich mit der Geschwindigkeit v nach rechts. Dieser positiven Liniensladung ist eine negativ geladene Kette mit Linienladungsdichte $-\lambda$ überlagert, die sich mit demselben Geschwindigkeitsbetrag v nach links bewegt.



Eine Punktladung q bewegt sich in der Entfernung s mit der Geschwindigkeit $u < v$ nach rechts.

In diesem System (Σ) herrscht kein elektrisches Feld, weil sich die beiden Linienladungen gegenseitig aufheben. Die Punktladung erfährt eine magnetische Kraft.

(a) Finden Sie den Nettostrom der geladenen Ketten. Bestimmen Sie das magnetische Feld und die Lorentzkraft F, die die Punktladung erfährt.

(b) Wir betrachten jetzt die gleiche Situation aus dem System Σ' heraus, das sich mit der Geschwindigkeit u nach rechts bewegt. In diesem Bezugssystem ist q in Ruhe. Benutzen Sie relativistische Mechanik, um herauszufinden, welche Kraft im System Σ' gemessen wird.

Hinweis:

$$F_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad F'_y = \frac{dp'_y}{dt'}, \quad p_y = p'_y, \quad dt = \gamma_u \left(dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right), \quad \text{u.s.w.}$$

$$\text{mit} \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

(c) Finden Sie die Geschwindigkeiten (v'_+ und v'_-) der beiden Linienladungen im System Σ'.

Verwenden Sie relativistische Geschwindigkeitsaddition.

(d) Wegen der Längenkontraktion sind die Ladungsdichten beider Linienladungen im System Σ' nicht die gleichen wie im System Σ.
Zeigen Sie, dass die Linienladungsdichten

$$\lambda'_+ = \gamma_u \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right) \lambda \qquad \text{und} \qquad \lambda'_- = -\gamma_u \left(1 + \frac{uv}{c^2} \right) \lambda$$

sind.

Hinweise:

- Betrachten Sie zunächst die Linienladungsdichte einer Kette in ihrem eigenen Ruhesystem.
- Für relativistische Geschwindigkeitsaddition, $v \oplus w = \dfrac{v + w}{1 + vw/c^2}$, gilt

$$\gamma_{v \oplus w} = \gamma_v \gamma_w \left(1 + \frac{vw}{c^2} \right).$$

(e) Im System Σ' erfährt die Ladung q keine magnetische Kraft. (Warum?) Bestimmen Sie die elektrische Kraft auf die Ladung q in Σ'.

Aufgabe 44 Lorentzransformation homogener Felder [Punkte: 3+0+4 = 7]

(1) Wenn sich Inertialsystem Σ mit $\vec{v}$ relativ zu Σ_0 bewegt, sind die Transformationen der Felder gegeben durch

$$B_\parallel = B_{0\,\parallel}\,, \quad \vec{B}_\perp = \gamma\left(\vec{B}_{0\perp} - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}_0\right)\,;$$

$$E_\parallel = E_{0\,\parallel}\,, \quad \vec{E}_\perp = \gamma\left(\vec{E}_{0\perp} + \vec{v}\times\vec{B}_0\right) \qquad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Index $\parallel$ kennzeichnet zu $\vec{v}$ parallele und $\perp$ zu $\vec{v}$ senkrechte Komponenten der Felder.

(2) Die Beträge

$$\boxed{c^2\vec{B}^2 - \vec{E}^2} \qquad \text{und} \qquad \boxed{\vec{E}\cdot\vec{B}}$$

sind invariant unter Lorentztransformationen.

In einem Inertialsystem Σ_0 herrsche ein *homogenes* elektromagnetisches Feld, $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$.

(a) Unter welchen Bedingungen gibt es ein Inertialsystem Σ, in dem das magnetische Feld verschwindet? Mit welcher Geschwindigkeit muss es sich bewegen?

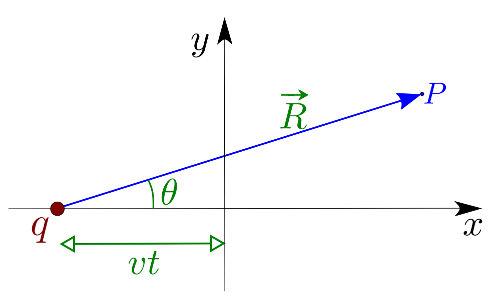
(b) Diskutieren Sie die in Teilaufgabe (a) gefundene Bedingungen mit Hilfe der Invarianten des elektromagnetischen Feldes.

(c) Wir gehen davon aus, dass die Inertialsysteme Σ_0 und Σ zum Zeitpunkt $t_0 = t = 0$ zusammenfallen und dass die Relativgeschwindigkeit in der Richtung x verläuft: $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$. In Σ_0 ruht eine Punktladung q im Ursprung.

Berechnen Sie das elektrische Feld, wie es im System Σ am Punkt P gemessen wird. Verwenden Sie den in der Abbildung definierten Vektor $\vec{R}$ und den Winkel θ, um das Feld in der Form

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}f(v,\theta)\frac{\vec{R}}{R^3}$$

auszudrücken. Bestimmen Sie die Funktion $f(v,\theta)$.



Aufgabe 45 Eine Herleitung der Transformation der Felder [Punkte: 4]

Das Inertialsystem S' bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$ gegenüber dem Inertialsystem S.

Aus der Lorentztransformationen erhält man die Differentiationsregeln (Herleitung nicht gefragt):

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma_v \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right), \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \gamma_v \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right).$$

Benutzen Sie die Forminvarianz der Maxwellgleichungen unter Lorentztransformation, um die Transformationsregeln für die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes herzuleiten.

Hinweis: Es genügt die quellenlosen (homogenen) Maxwell-Gleichungen zu verwenden. Betrachten Sie erst die y-Komponente der Wirbelgleichung für $\vec{E}$.