

2. Wahrscheinlichkeitstheorie

2.1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir betrachten eine (oder mehrere) stochastische Variable X .

X kann entweder diskrete ^{Werte x_i} (z.B. Punktzahl beim Würfeln) oder kontinuierliche Werte x (z.B. Koordinate eines Teilchens) annehmen.

Die statistischen Eigenschaften werden vollständig durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung (genauer: Wahrscheinlichkeitsdichte) p beschrieben. Eigenschaften:

	x diskret	x kontinuierlich
Positivität	$p_i = p(x_i) \geq 0$	$p(x) \geq 0$
Norm	$\sum_i p_i = 1$	$\int dx p(x) = 1$
Mittelwert (Erwartungswert)	$\langle X \rangle = \sum_i x_i p_i$	$\langle X \rangle = \int dx x p(x)$
n -tes Moment	$\langle X^n \rangle = \sum_i x_i^n p_i$	$\langle X^n \rangle = \int dx x^n p(x)$
Standardabweichung (Varianz = σ^2)	$\sigma = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$	

Charakteristische Funktion

$$\phi(k) = \langle e^{ikX} \rangle = \int dx e^{ikx} p(x)$$

↪ Momentenentwicklung

$$= \sum \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle$$

Damit:

$$p(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \phi(k)$$

Momente aus char. Fkt:

$$\langle X^n \rangle = \frac{1}{i^n} \left(\frac{d}{dk} \right)^n \phi(k) \Big|_{k=0}$$

(4V)

Kumulanten - Entwicklung:

$$\phi(k) = \exp \left(\sum_n \frac{(ik)^n}{n!} C_n(x) \right) \left[= \sum_n \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle \right]$$

Entwickeln ergibt

$$C_1(x) = \langle X \rangle, \quad C_2(x) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \sigma^2,$$

$$C_3(x) = \langle X^3 \rangle - 3 \langle X \rangle \langle X^2 \rangle + 2 \langle X \rangle^3; \dots$$

i.a. konvergiert eine Kumulanten-Entwicklung schneller als eine Momentenentwicklung. z.B. Gauß-Verteilung

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \langle X \rangle)^2 \right) \quad \leadsto C_n(x) = 0 \quad \forall n \geq 3.$$

Mehrere stochastische Variablen:

Zwei kontinuierliche Variablen X und Y mit Werten x, y .

Gemeinsame Verteilungsfkt: $p_{X,Y}(x,y) \geq 0$

Norm $\int dx dy \, p(x,y) = 1$

Momente $\langle X^n Y^m \rangle = \int dx dy \, x^n y^m p_{X,Y}(x,y)$

Reduzierte Verteilungsfkt $p_X(x) = \int dy \, p_{X,Y}(x,y)$

Kovarianz $\text{cov}(X,Y) = \langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle$

Korrelation $\text{cor}(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Unabh. Variablen
 $\leadsto p$ faktorisiert

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) p_Y(y)$$

Funktionen stochastischer Variablen:

$$Z = g(X, Y)$$

Verteilungsfkt

$$f_Z(z) = \int dx dy \delta(z - g(x, y)) f_{X,Y}(x, y)$$

Charakter. Fkt

$$\phi_Z(k) = \int dx dy e^{ikg(x, y)} f_{X,Y}(x, y)$$

Beispiel:

$$X, Y \text{ unabh.}, \quad f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$Z = g(x, y) = x + y$$



$$f_Z(z) = \int dz' f_X(z - z') f_Y(z')$$

Faltung!

$$\phi_Z(k) = \phi_X(k) \phi_Y(k)$$

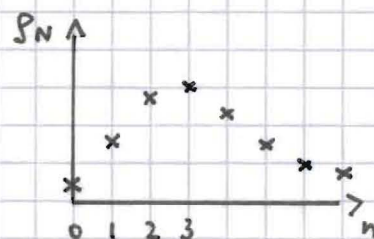
2.2. Wichtige Verteilungen

Wir betrachten ein System, wo jede Messung eines von zwei möglichen Ergebnissen (1 oder 2), mit Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$. (Beispiele: Münze Kopf oder Zahl $p = q = \frac{1}{2}$; Spin im Magnetfeld $\uparrow$ oder $\downarrow, \dots$; Radioaktiver Zerfall in Zeiteinheit Δt : $p \ll 1$)

N Messungen. Die Wahrscheinlichkeit, n mal Ereignis 1 zu messen, ist gegeben durch die

Binomial - Verteilung

$$p_N(n) = \frac{N!}{n! (N-n)!} p^n q^{N-n}$$



$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_N(n) = \sum_n p \frac{\partial}{\partial p} p_N(n) \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \Big|_{p+q=1} = pN \\ \sigma_N &= \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = \sqrt{Npq} \end{aligned}$$

Für große N gilt $\sigma_N / \langle n \rangle \sim 1/\sqrt{N} \rightarrow 0$ $\nearrow$ relative Breite verschwindet.

Gauß - Verteilung

N groß, pN , qN groß $\leadsto n$ kontinuierlich, $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirling)

$$p_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_N} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_N^2} (n - \langle n \rangle)^2 \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dn p_N(n) = 1$$

Poisson - Verteilung

Für $N \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $a = Np$ fest (radioaktiver Zerfall, $N \sim \frac{1}{\Delta t}$)
 reduziert sich Binomialverteilung auf Poisson-Verteilung

$$P_N(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}$$

$$\langle n \rangle = a, \quad \sigma_N = \sqrt{a}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_N(n) = 1$$

Gauß-Verteilung mit mehreren Variablen x_i :

$$P(x_1, \dots, x_N) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{ij} (x_i - a_i) A_{ij} (x_j - a_j)\right)$$

$A_{ij} = A_{ji}$

Zur Diskussion definieren wir $\tilde{x}_i = x_i - a_i$ und $S = \frac{1}{2} \sum_{ij} \tilde{x}_i A_{ij} \tilde{x}_j$.

Für den Mittelwert folgt:

$$\langle x_n \rangle = a_n + \langle \tilde{x}_n \rangle = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{N/2}} \int dx_1 \dots dx_N (a_n + \tilde{x}_n) \exp(-S) = a_n$$

Weiter kann man die zu $\{\tilde{x}_i\}$ konjugierten Variablen $\{\eta_i\}$

einführen,

$$\eta_i = \frac{\partial S}{\partial \tilde{x}_i} = \sum_j A_{ij} \tilde{x}_j \quad \rightarrow \quad S = \sum_{ij} \eta_i (A^{-1})_{ij} \eta_j$$

$$\rightarrow \tilde{x}_i = \frac{\partial S}{\partial \eta_i} = \sum_j (A^{-1})_{ij} \eta_j$$

$$\rightarrow \langle \tilde{x}_i \eta_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\langle \tilde{x}_i \tilde{x}_j \rangle = (A^{-1})_{ij}$$

$$\langle \eta_i \eta_j \rangle = A_{ij}$$