

6. Phasenübergänge

Literatur: N. Goldenfeld,
Lectures on Phase Transitions
and the Renormalization Group,
Persens

6.1. Molekularfeld - Näherung für das Heisenberg - Modell

Wir betrachten das ferromagnetische Heisenberg - Modell : für Spins $-\frac{1}{2}$:

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \gamma \vec{B} \cdot \sum_i \vec{S}_i \quad (J > 0)$$

Für hohe Temperaturen, $kT \gg J$, verhält sich das System wie ein (fast) freies paramagnetisches Spinsystem, siehe Kap 4.1.

Bei $T=0$ ist der Grundzustand je nach Vorzeichen von B gegeben

durch $| \psi \rangle_+ = | \uparrow \uparrow \uparrow \dots \rangle$ oder $| \psi \rangle_- = | \downarrow \downarrow \downarrow \dots \rangle$,

für $B=0$ ist der Grundzustand kontinuierlich entartet. Die zugehörige

Energie ist

$$E_0 = -J \sum_{\langle ij \rangle} S^2 = -J \frac{z}{2} N S^2 \quad (B=0)$$

wobei z die Zahl der nächsten Nachbarn eines Gitterplatzes ist.

(Quadratkittel $z=4$, einfach kubisches Gitter $z=6$).

Damit erwarten wir einen Phasenübergang als Funktion von T zwischen einem geordneten und einem ungeordneten Zustand.

In der Molekularfeld - Näherung nehmen wir an, daß der Effekt der einen Spin umgebenden Spins durch ein lokales effektives (konfigurationsabhängiges) Feld ersetzt werden kann.

Zur Herleitung nehmen wir an, daß die Abweichung $\vec{S}_i - \langle \vec{S}_i \rangle$ eines Spins vom Mittelwert klein ist.

$$\begin{aligned}\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j &= (\vec{S}_i - \langle \vec{S}_i \rangle + \langle \vec{S}_i \rangle) (\vec{S}_j - \langle \vec{S}_j \rangle + \langle \vec{S}_j \rangle) \\ &= \underbrace{(\vec{S}_i - \langle \vec{S}_i \rangle) (\vec{S}_j - \langle \vec{S}_j \rangle)}_{\text{klein} \rightarrow \%} + \vec{S}_i \langle \vec{S}_j \rangle + \langle \vec{S}_i \rangle \vec{S}_j - \langle \vec{S}_i \rangle \langle \vec{S}_j \rangle\end{aligned}$$

Für homogene Zustände gilt $\langle \vec{S}_i \rangle = \langle \vec{S} \rangle$ und damit

$$\hat{H}_{\text{MF}} = -(\vec{h} + \vec{h}_{\text{MF}}) \sum_i \vec{S}_i + \frac{1}{2} N \langle \vec{S} \rangle^2 \quad \vec{h} = \gamma \vec{B}$$

mit der Selbstkonsistenzbedingung (!)

$$\vec{h}_{\text{MF}} = \frac{1}{2} \langle \vec{S} \rangle$$

H_{MF} beschreibt nun unabhängige Spins in einem Feld $\vec{h} + \vec{h}_{\text{MF}}$, aus Kap 4.1. kennen wir die Eigenschaften dieses Systems.

Wählen wir die z -Achse im Spinraum $\parallel \langle \vec{S} \rangle$, dann folgt

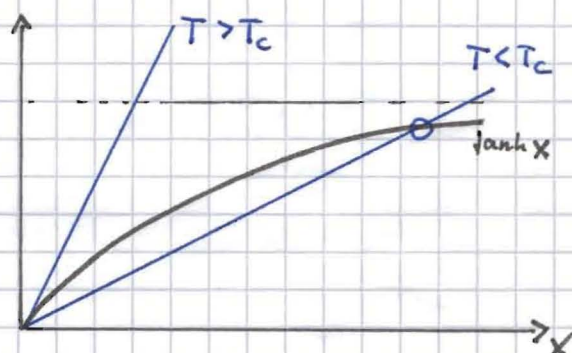
$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{h + h_{\text{MF}}}{2kT} \right) \quad \left(\text{Faktor 2, da hier } S \text{ statt } \sigma, \text{ mit } S_z = \pm \frac{1}{2} \right)$$

Wir diskutieren jetzt die Lösung der Selbstkonsistenzgleichung für $\vec{B} = 0$ ($h=0$).

Man erhält mit $x = h_{\text{MF}} / 2kT$:

$$\frac{4kT}{\gamma z} x = \tanh x$$

Diese transzendente Gleichung kann graphisch gelöst werden.



$T > T_c$: Nur eine Lösung $x=0 \leadsto \langle \vec{S} \rangle = 0$.

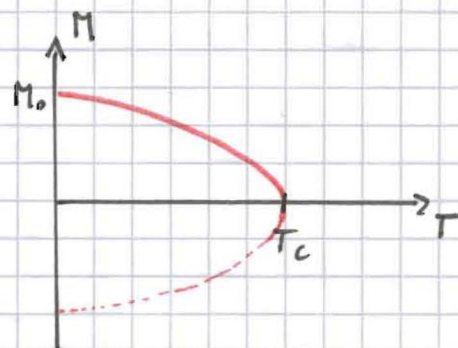
$T < T_c$: Ex. eine Lösung mit $x \neq 0$. (und $x \rightarrow -x$ sowie $x=0$)

T_c ist gegeben durch $k_B T_c = \gamma z / 4$.

Bei $T = T_c$ findet ein Phasenübergang statt.

Die Magnetisierung ist

$$M = - \frac{\partial F}{\partial B} = \gamma N \langle S \rangle = \underbrace{\gamma N}_{M_0} \tanh x$$



Für $T < T_c$ gibt es zwei stabile Lösungen mit $M \neq 0$;

die Lösung mit $M = 0$ ist instabil (siehe unten).

Für $T < T_c$ ist die Magnetisierung also ohne äußeres Feld von Null verschieden: "spontane Magnetisierung" (hier: Ferromagnetismus.)

Dieser Zustand besitzt langreichweitige Ordnung (LRO), da gilt:

$$\langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle_{MF} = \langle S \rangle_{MF}^2 \neq 0 \quad \text{für } |i-j| \rightarrow \infty.$$

Für $\vec{B} = 0$ ist die Richtung von $\vec{M}$ beliebig. Der Zustand des Systems zeichnet bei $\vec{M} \neq 0$ eine Richtung aus, damit hat dieser Zustand eine geringere Symmetrie als der Hamilton-Operator $\hat{H}$ (bezgl. Drehungen im Spinraum, $\hat{R}$), formal $[\hat{H}, \hat{R}] = 0$ aber $[\hat{S}, \hat{R}] \neq 0$: "spontane Symmetriebrechung".

Die Magnetisierung $\vec{M}$ wird als Ordnungsparameter bezeichnet.

Aus der spontanen Symmetriebrechung für $T < T_c$ ergeben sich

wichtige Konsequenzen für die elementaren Anregungen im

System. Im vorliegenden Fall einer gebrochenen kontinuierlichen

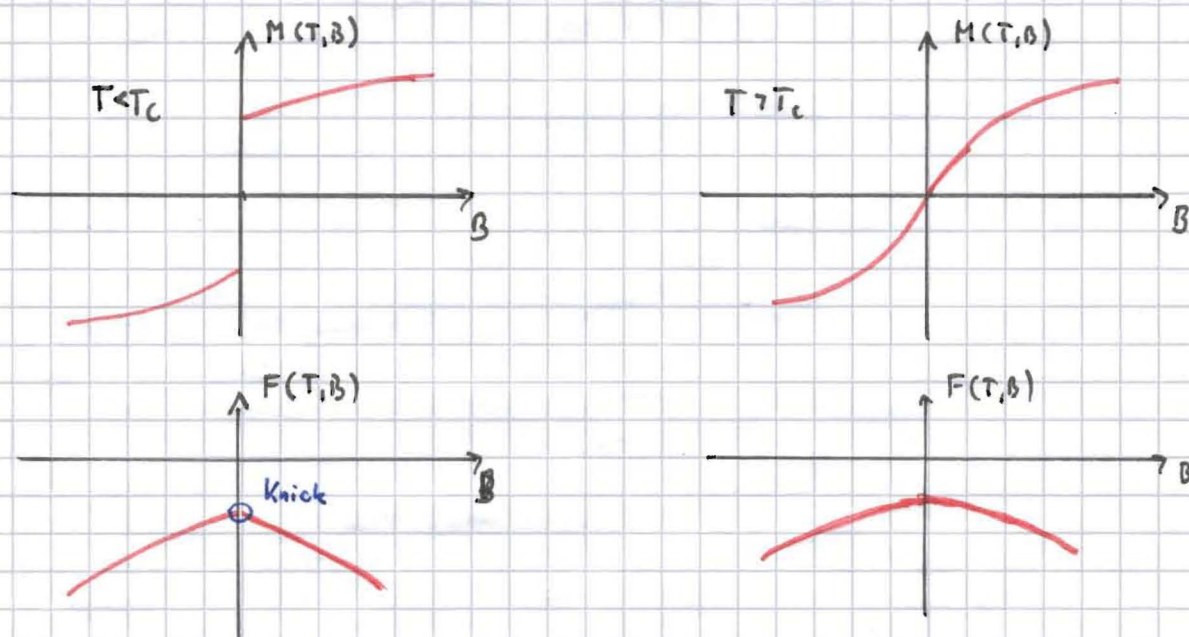
Symmetrie ($SU(2)$) existieren Anregungen mit lückenlosem

Spektrum $\omega(q \rightarrow 0) \rightarrow 0$ (Goldstone-Moden), dies

sind hier Spinwellen. Außerdem gibt es Defekte

im Ordnungsparameterfeld (Bloch-Wände).

Wir diskutieren noch kurz das Verhalten bei $\beta \neq 0$.
 Dann ist immer $\vec{M} \parallel \vec{B}$. Aus $\vec{M}$ erhalten wir $F(T, \beta)$
 durch Integration von $\vec{M} = -\partial F / \partial \beta$. Qualitativ:



Phasenübergang bei $T = T_c$: Singuläres Verhalten

Die Selbstkonsistenzgleichung kann umgeschrieben werden als:

$$\beta h = \ln \frac{1 + 2 \langle S \rangle}{1 - 2 \langle S \rangle} - \frac{T_c}{T} 4 \langle S \rangle$$

(mit Hilfe des Add. Theorems für $\tanh$ sowie $x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}$).

Entwickeln für kleine $\langle S \rangle$ (nahe T_c !) liefert:

$$\beta h = 4 \langle S \rangle \left(1 - \frac{T_c}{T} \right) + \frac{16}{3} \langle S \rangle^3 + \dots \quad (*)$$

(Dies erhält man auch direkt durch Entwickeln der Selbstkonsistenzgl.)

Wir definieren eine reduzierte Temperatur $t = \frac{T - T_c}{T_c}$,
 mit $t \ll 1$ nahe des Phasenübergangs.

Wir erhalten damit Resultate für sog. kritische Exponenten:

a) $B=0, T < T_c$: $\langle S \rangle^2 \propto -t$ (allg. $\langle S \rangle \propto (-t)^\beta \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$)

b) $t=0$: $\langle S \rangle^3 \propto B$ (allg. $\langle S \rangle \propto B^{1/\delta} \rightarrow \delta = 3$)

c) Suszeptibilität

$$\chi_T = \frac{1}{N} \frac{\partial M}{\partial B} \Big|_{B=0} \propto 2 \frac{\partial \langle S \rangle}{\partial h} = \begin{cases} \frac{1}{kT_c} \frac{1}{t} & T > T_c \\ \frac{1}{kT_c} \frac{1}{2|t|} & T < T_c \end{cases}$$

Allgemein: $\chi_T = \begin{cases} t^{-\gamma} & T > T_c \\ |t|^{-\gamma'} & T < T_c \end{cases} \rightarrow \gamma = \gamma' = 1$ in Molekularfeld-näherung

d) Wärmekapazität (ohne Beweis)

$$C_H = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \frac{3}{2} N k (1 + o(t)) & T < T_c \end{cases} \quad B=0$$

Bei vorliegendem Übergang ($B=0, T=T_c$) sind $\frac{\partial F}{\partial T}, \frac{\partial F}{\partial B}$ stetig, aber $\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial B^2}$ unstetig, es handelt sich also um einen Phasenübergang zweiter Ordnung.

Molekularfeld-Näherungen können für viele Phasenübergänge benutzt werden; sie vernachlässigen Fluktuationen des Ordnungsparameters. Es zeigt sich, daß solche Fluktuationen (für niedrige Raumdimension D) in der Nähe des Phasenübergangs wichtig werden, deshalb werden i.a. die kritischen Exponenten durch Molekularfeldtheorie nicht korrekt wiedergegeben.

6.2. Landau - Theorie der Phasenübergänge

Lit. N. Goldenfeld,
Lectures on Phase
Transition and the
Renormalization Group

Thermodynamische Größen bzw. ihre Ableitungen sind singulär am kritischen Punkt, z.B. $F(T, \vec{H})$ am Punkt $T=T_c, H=0$ beim Ferromagneten.

Landau: Definiere ein verallgemeinertes Potential, welches zusätzlich den Ordnungsparameter (z.B. $\vec{m} = \vec{M}/V$) als Variable enthält und nicht singulär wird (!).

(Einheitswahl)

Im folgenden explizit für Ferromagnet. (Zur Vereinfachung $\vec{m} = \vec{M}/V$ dimensionlos)

Aus dem Potential $f(T, \vec{H}) = F/V$ mit $df = -s dT - \vec{m} d\vec{H}$

wird so $\varphi(T, \vec{H}, \vec{m})$. **Achtung**: φ ist kein tot. Potential!

Der tot. Gleichgewichtszustand ist zu ermitteln aus:

$$\frac{\partial \varphi(T, \vec{H}, \vec{m})}{\partial \vec{m}} = 0 \quad ! \quad (\vec{m} \text{ homogen})$$

Daraus erhält man $\vec{m}_{\text{ggw}}(T, \vec{H})$ und das Potential $f(T, \vec{H}) = \varphi(T, \vec{H}, \vec{m}_{\text{ggw}}(T, \vec{H}))$

(Bem.: Man kann zeigen, daß dieses Vorgehen formal einer Sattelpunktnäherung in einer Funktionalintegraldarstellung der Zustandssumme entspricht.)

I.a. ist φ unbekannt; in der Nähe des Phasenübergangs ($\vec{m}$ klein!) kann es jedoch nach $\vec{m}$ entwickelt werden (da nicht singulär!):

$$\varphi(T, \vec{H}, \vec{m}) = \varphi_0(T) + \bar{f} \left(\frac{a(T)}{2} |\vec{m}|^2 + \frac{b(T)}{4} |\vec{m}|^4 - \vec{m} \cdot \vec{h} \right)$$

Dabei hat $\bar{f}$ die Dimension einer Energie (pro Volumen), und $\vec{h} = \vec{H}/\bar{f}$.

Wegen Isotropie, d.h. Rotations-symmetrie im Spinraum, können für $\vec{H}=0$ nur gerade Potenzen von $\vec{m}$ auftreten. (φ ist Skalar, $\vec{m}$ ist Vektor!)

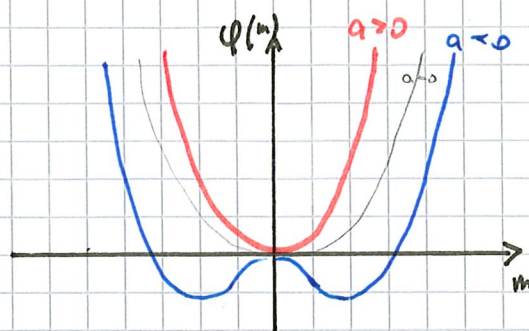
(Anders beim Flüssig-Gas-Übergang, wo $\sigma = V/N$ der Ordnungsparameter ist.)

φ_0 kann üblicherweise ignoriert werden (nur schwach T-abhängig).

U.h. muß ein φ^6 -Term hinzugefügt werden!

Diskussion für $\vec{h} = 0$ Stabilität erfordert $b > 0$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m} = 0 \quad \text{liefert} \quad m = \begin{cases} 0 & a > 0 \\ \pm \sqrt{-a/b} & a < 0 \end{cases}$$



$a > 0$ liefert offenbar einen Paramagneten ($T > T_c$), während $a < 0$ einen Ferromagneten ($T < T_c$) beschreibt.

Folglich $a(T_c) = 0$, und wir können entwickeln: $a(T) = \alpha \underbrace{\frac{T - T_c}{T_c}}_t$

$$\rightarrow m = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \pm \sqrt{\alpha/b} |t| & T < T_c \end{cases}$$

↪ PÜ 2. Ordnung
(kontinuierlich)

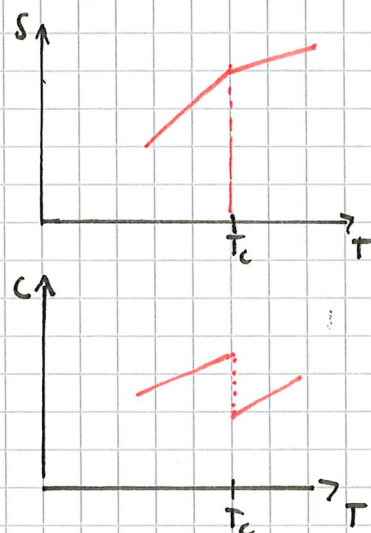
Damit

$$f(T) = \begin{cases} \varphi_0(T) & T > T_c \\ \varphi_0(T) - f \frac{\alpha^2}{4b} \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^2 & T < T_c \end{cases}$$

$$S/V = -\frac{\partial f}{\partial T} = \begin{cases} s_0(T) & T > T_c \\ s_0(T) - f \frac{\alpha^2}{2b} \frac{T_c - T}{T_c^2} & T < T_c \end{cases}$$

$$C/V = T \frac{\partial S/V}{\partial T} = \begin{cases} c_0 & T > T_c \\ c_0 + f \frac{\alpha^2}{2b} \frac{1}{T_c} & T < T_c \end{cases}$$

$$\frac{T}{T_c^2} \approx \frac{1}{T_c} \quad \text{nahe } PÜ$$

Diskussion für $\vec{h} \neq 0$ $\vec{m} \parallel \vec{h}$ wegen $\varphi \rightarrow \min$

$$\Delta \varphi = f \left(\frac{\alpha}{2} t m^2 + \frac{b}{4} m^4 - m h \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m} = 0 \quad \text{liefert} \quad \alpha \frac{1}{2} m + b m^3 \stackrel{!}{=} h \quad *$$

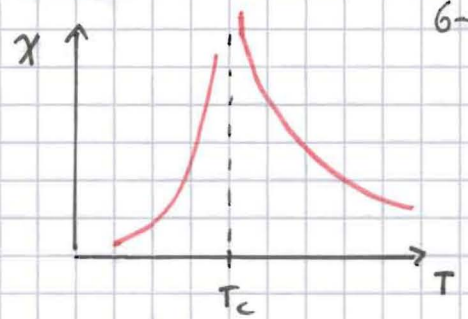
$$m(h) = m_{\text{spontan}} + \chi(T) h, \quad \chi := \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0} \quad \text{Suszeptibilität}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial h} \right|_{h=0} (*) : \quad \alpha \frac{1}{2} \chi + 3 b m_{\text{spontan}}^2 \chi \stackrel{!}{=} 1$$

Damit:

$$\chi(T) = \begin{cases} \frac{T_c}{\alpha(T-T_c)} & T > T_c \\ \frac{T_c}{2\alpha(T_c-T)} & T < T_c \end{cases}$$

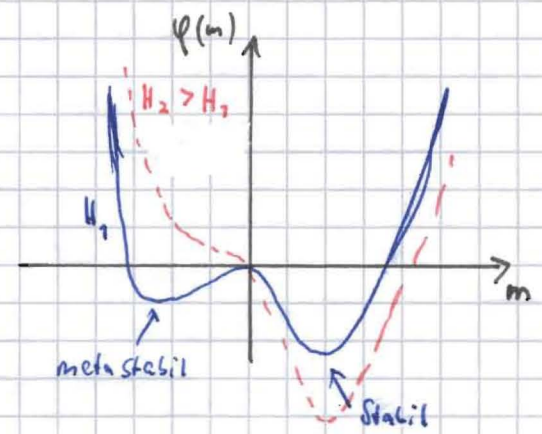
Curie-Weiss



Exakt am Phasenübergangspunkt $T = T_c$:

$$m = \left(\frac{h}{k_B}\right)^{1/3}$$

Das Landau-Funktional $\varphi(m, H)$ hat zwei Minima für $T < T_c$! Bei Variation von H durch Null tauschen beide Minima ihre Rolle

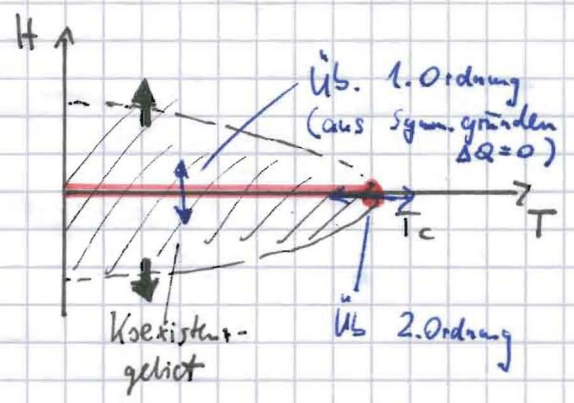


$\hat{=}$ Phasenübergang erster Ordnung

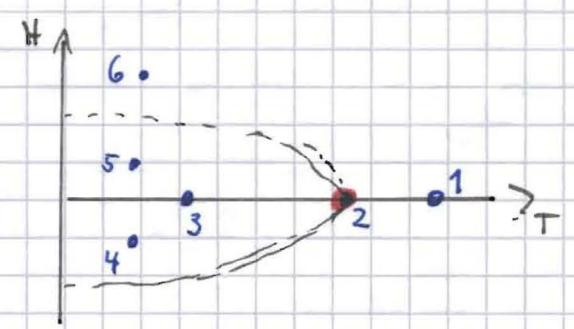
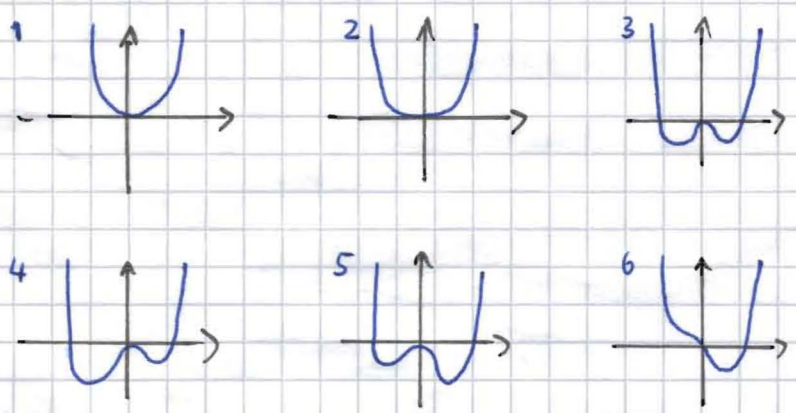
(Sprung der Magnetisierung von $m_{spontan}$ nach $-m_{spontan}$)

Für noch größere Felder verschwindet metastabiles Minimum.

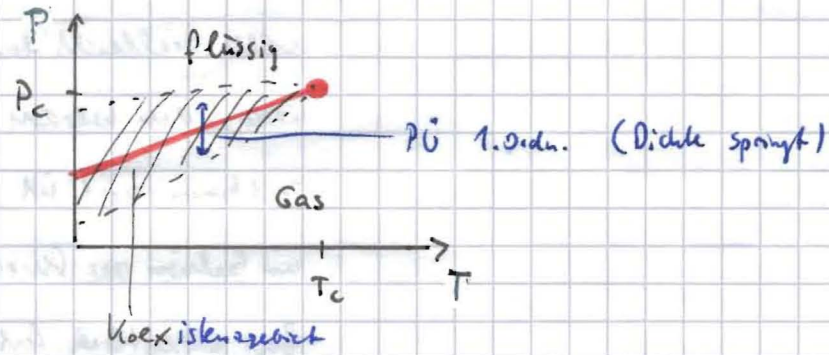
Das Phasendiagramm ist damit:



$\varphi(m)$ hat jeweils folgende Form:

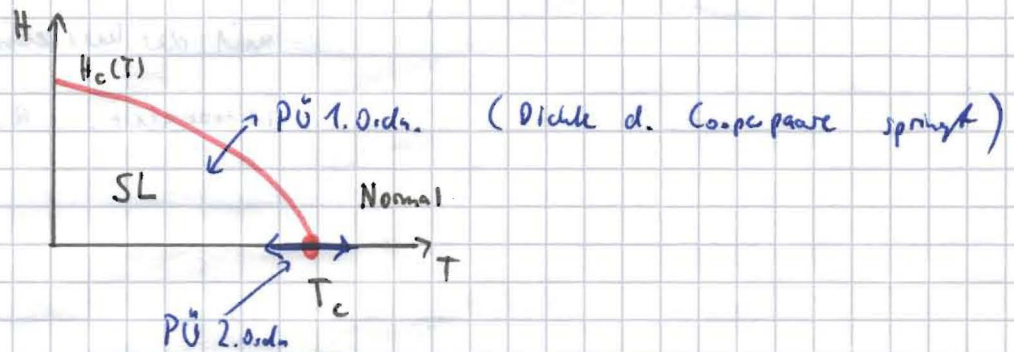


Analoges Verhalten für van-der-Waals-Gas : (Ordnungsparameter ist Dichte)



Supraleiter :

(OP ist
Kondensat dichte)



6.3. Räumliche Korrelationen

Aufgrund von Fluktuationen wird der Ordnungsparameter ortsabhängig von seinem Mittelwert abweichen. Innerhalb der Landau-Theorie können solche räumlichen Variationen $\vec{m}(\vec{r})$ erlaubt werden. Da Variationen Energie kosten, und zwar weniger Energie für langsame Variationen, erhält man in einer Gradientenentwicklung einen zusätzlichen Beitrag $\propto |\nabla \vec{m}|^2$:
Zeit kommt nirgends vor, GGTD P.S. vielleicht hier: "ausgedehnte Fluktuationen"

$$\psi(T, \vec{H}, \vec{m}(\vec{r})) = \psi_0 + \bar{f} \left(\frac{a(T)}{2} \vec{m}^2 + \frac{b(T)}{4} \vec{m}^4 + \xi_0^2 (\vec{\nabla} \vec{m}(\vec{r}))^2 - \vec{h} \cdot \vec{m} \right)$$

(Landau-Ginzburg-Theorie)

$$\uparrow \sum_{ij} (\nabla_i m_j)(\nabla_i m_j)$$

ξ_0 ist dabei eine natürliche Längenskala, siehe unten.

Die freie Energie folgt durch Integration:

$$F = \int d^D r \psi(T, \vec{H}, \vec{m}_{\text{ggw}}(\vec{r}))$$

Wir betrachten jetzt die Änderung der freien Energie durch eine Abweichung $\delta m(\vec{r})$ vom Gleichgewichtswert $\vec{m}_0$. Entwickeln:

$$\delta F = \frac{1}{2} \int d^D r \bar{f} \delta m(\vec{r}) \left(\underbrace{a(T)}_{=:A} + 3b(T)m_0^2 - \xi_0^2 \vec{\nabla}^2 \right) \delta m(\vec{r})$$

$\uparrow$ partiell integriert

Fourierzerlegung von δm :

$$\delta F = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \bar{f} \delta m(\vec{k}) \left(A + \xi_0^2 k^2 \right) \delta m(-\vec{k})$$

Die Korrelationsfunktion $\langle \delta m \delta m \rangle$ berechnet sich aus:

$$\langle \delta m(\vec{k}) \delta m(\vec{k}') \rangle = \frac{1}{Z'} \frac{1}{\hbar} \int d m(\vec{k}) \delta m(\vec{k}) \delta m(\vec{k}') e^{-\beta \delta F},$$

wobei sich $e^{-\beta \psi_0}$ in Zähler und Nenner kürzt.

(Details der Rechnung siehe Goldenfeld)

Das Gaußsche Integral läßt sich ausführen:

$$\langle \delta m(k) \delta m(k') \rangle = \delta_{k,-k'} \frac{kT}{\int (A + \int_0^2 k^2)}$$

Ornstein-Zernike-Korrelationsfunktion

Fourier-Transform in den Ortsraum:

$$\langle \delta m(\vec{r}) \delta m(\vec{r}') \rangle = \langle m(\vec{r}) m(\vec{r}') \rangle - m_0^2 =: G(\vec{r} - \vec{r}')$$

mit:

$$G(r) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \langle \delta m(k) \delta m(-k) \rangle$$

Für $D=3$ exakt:

$$G(r) = \frac{kT}{C} \frac{e^{-r/\xi(T)}}{r}$$

Allgemein für große r :

$$G(r) \propto \frac{e^{-r/\xi(T)}}{r^{(D-1)/2}} \xi^{\frac{3-D}{2}}$$

Dabei ist $\xi(T)$ die Korrelationslänge:

$$\xi(T) = \xi_0 / \sqrt{A} = \begin{cases} \xi_0 / \sqrt{A} & T > T_c \\ \xi_0 / \sqrt{2\alpha|t|} & T < T_c \end{cases}$$

Räumliche Fluktuationen des Ordnungsparameters sind also korreliert auf einer Längenskala $\xi(T)$, die am kritischen Punkt divergiert,

$$\xi(T) \propto |t|^{-\nu}, \quad \nu = \frac{1}{2}$$

Am kritischen Punkt $\xi(T) = \infty$, und $G(r) \propto r^{2-D}$ in Landau-Theorie.

Nahе des kritischen Punktes variiert ϕ also langsam, dies ^{mit dem O(1) R.S.} recht flüchtig Gradentwicklung in der Ginzburg-Landau-Theorie.

Die Divergenz der Korrelationslänge am krit. Punkt bedeutet, daß sich die relevante Physik auf großen Längenskalen abspielt, d.h. mikroskopische Details werden unwichtig.

⇒ Universalität der kritischen Phänomene

6.4. Kritische Exponenten und Skalenverhalten

Am kritischen Punkt divergiert Korrelationslänge ξ , d.h. es gibt Fluktuationen auf allen Längenskalen. $\hat{=}$ Das System ist skalen invariant.

Dadurch hängen alle Größen über Potenzgesetze von den externen Parametern ab. (Nur Potenzgesetze $f \sim x^d$ sind skalen invariant!)

Diese Potenzgesetze definieren sogenannte kritische Exponenten (Die beschriebene Landau - Theorie liefert solche Potenzgesetze, aber die Werte der Exponenten sind in niedrigen Dimensionen inkorrekt, siehe unten.)

Übersicht über gebräuchliche krit. Exponenten (für Magnet)

	Größe	Verhalten	Landau
Spez. Wärme	$C_H = T (\partial^2 S / \partial T^2)_H$	$C_H \propto t ^{-\alpha} \quad t \rightarrow 0, H=0$	$\alpha = 0$
Ordn. parameter	$m(t)$	$m \propto (-t)^\beta \quad t \rightarrow 0, H=0$	$\beta = 1/2$
Suszeptibilität	$\chi = \partial m / \partial H$	$\chi \propto t ^{-\gamma} \quad t \rightarrow 0, H=0$	$\gamma = 1$
Krit. Isotherme	$M(H) \text{ bzw. } H(m)$	$H \propto m ^\delta \text{ sign}(m) \quad H \rightarrow 0, t=0$	$\delta = 3$
Korr. Länge	$\xi(t)$	$\xi \propto t ^{-\nu} \quad t \rightarrow 0, H=0$	$\nu = 1/2$
Korr. funktion	$G(r)$	$G(r) \propto r ^{-D+2-\eta} \quad t \rightarrow 0, H=0$	$\eta = 0$

Die Universalität hat zur Folge, daß ganze Klassen von Systemen gleiche krit. Exponenten aufweisen $\Rightarrow$ Universalitätsklassen.

Die Exponenten hängen nur von der Dimensionalität des Systems und der Symmetrie des Ordnungsparameters ab, nicht von mikroskopischen Details.

Beispiele:

- a) Ising - Modell : Ordnungsparameter hat $n=1$ reelle Komponente
- b) Heisenberg - Modell : $n=3$ reelle Komponenten
- c) Supraleiter : Ordnungsparameter ψ ist komplexer Skalar
(Wellenfunktion des Kondensats) ; er koppelt mit Ladung $2e$
an elektromag. Feld:

$$\varphi(\psi) = \varphi_0 + \int \left(\frac{a}{2} |\psi|^2 + \frac{b}{4} |\psi|^4 + \frac{g_0^2}{2t^2} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi \right|^2 \right) + \frac{H^2}{8\pi}$$

(Ginzburg-Landau-Theorie
für Supraleiter)

Vektorpot
mag.
Energiedichte

Da ξ die einzige relevante Länge in der Nähe des kritischen Punktes ist, kann man das Verhalten des Systems unter Skalentransformationen studieren:

Maßstabsänderung	Länge	$x \rightarrow b x$
Gleichzeitig Parameter reskalieren	t	$t \rightarrow b^{d_t} t$
	H	$H \rightarrow b^{d_H} H$

Bei einer solchen Transformation sollte Physik invariant sein (für geeignete d_t, d_H), da die Änderung von $\xi(T)$ bei Parameteränderung einer Maßstabsänderung entspricht.

Skalenhypothese

$$\varphi(t, H) = b^{-D} \varphi(b^{d_t} t, b^{d_H} H)$$

Wegen $\xi \sim |t|^{-\nu}$ gilt $d_t = 1/\nu$, d.h.

$$\varphi(t) = b^{-D} \varphi(b^{1/\nu} t) \quad (H=0)$$

denn $t \rightarrow b^{1/\nu} t$ bedeutet $\xi \rightarrow 1/b \xi$, was durch $x \rightarrow b x$ kompensiert wird.

Ebenfalls für $H=0$ und speziell $b = t^{-1/d_t} = t^\nu$ folgt

$$\varphi(t) = t^{D\nu} \varphi(1)$$

Aus der Skalenhypothese können die kritischen Exponenten abgeleitet werden. Man erhält die sogenannten Skalenrelationen:

$$2 - \alpha = 2\beta + \gamma$$

$$2 - \alpha = \beta(\delta + 1)$$

Die Skalenhypothese kann im Rahmen der Renormierungsgruppentheorie sauber abgeleitet werden.

(siehe z.B. Goldenfeld)

6.5. Fluktuationen und Ginzburg-Kriterium

Wie erwähnt ist Landau-Theorie in der Nähe des Phasenübergangs (d.h. des krit. Punktes) u. U. inkorrekt. Warum?

Landau-Theorie als Molekularfeld-Theorie vernachlässigt Fluktuationen des Ordnungsparameters. Die Qualität einer solchen Näherung hängt davon ab, wie groß Fluktuationen im Vergleich zum Mittelwert sind. Wir betrachten Korrfunktionen auf charakteristischer Längenskala $\xi(T)$:

$$\begin{array}{ccc}
 \langle \delta m(\vec{r} = \xi(T)) \delta m(\vec{r} = 0) \rangle & \propto & \frac{\xi(T)^{2-D}}{|\xi|} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 m_0^2 & \propto & |\xi|^{(D-4)/2} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 m \propto (-t)^{1/2} & & \xi \sim |t|^{-1/2}
 \end{array}$$

$\xrightarrow{|\xi| \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & D > 4 \\ \infty & D < 4 \end{cases} \quad !$

Das heißt, die relativen Fluktuationen des OP verschwinden in der Nähe des Phasenübergangs für $D > 4$ (!) - dann ist Landau-Theorie asymptotisch korrekt und die Exponenten in Kap. 6.4 exakt.

Dagegen sind für $D < 4$ Fluktuationen groß, und eine Molekularfeldnäherung ist nicht ausreichend (sie ist für $H \rightarrow 0$ qualitativ falsch!).

Allerdings kann der numerische Vorfaktor der Fluktuationen klein sein. Einer der „günstigen“ Fälle ist ein dreidimensionales Supraleiter, hier erhält man:

$$\frac{\langle \delta \psi(\vec{r}) \delta \psi \rangle}{|\psi_0|^2} \propto \left(\frac{k T_c}{E_F} \right)^2 |\xi|^{-1/2}$$

Damit werden Fluktuationen erst wichtig, wenn $|\xi| < \left(\frac{k T_c}{E_F} \right)^4 \sim 10^{-10}$. (!)

6.6. Renormierungsgruppe

L. Kadanoff 1967

K. Wilson 1971

F. Wegner 1971

Idee der RG

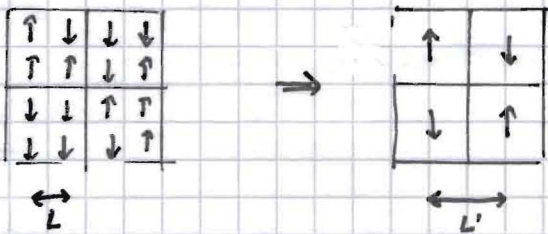
Kritischer Punkt ist skaleninvariant; in der Nähe ist Physik auf großen Längenskalen relevant $\leadsto$ Physik auf kleinen Skalen eliminieren.

Ausgehend von einem mikroskopischen oder effektiven Modell, z.B.

$$F = \int d^D x \bar{f} \left(a/2 \phi^2 + b/4 \phi^4 + \frac{1}{2} \epsilon_0^2 (\nabla \phi)^2 \right),$$

führt man sukzessive Renormierungsgruppen-Transformationen durch, bei denen man Freiheitsgrade und Wechselwirkungsprozesse auf kleinen Skalen eliminiert.

Bsp: Block-Spin-Statistik



Dabei werden die Wechselwirkungen modifiziert, sie hängen von der aktuellen Längenskala L ab.

(Ginzburg-Landau: $a(L)$, $b(L)$, $\epsilon_0(L)$)

Ein kritischer Punkt ist ein Fixpunkt der RG, da System dort skaleninvariant. (Es gibt noch weitere (triviale) Fixpunkte der RG, wo Parameter $\rightarrow 0$ oder $\rightarrow \infty$ fließen $\hat{=}$ stabile Phasen)

Man bestimmt Fixpunkte mit $\frac{\partial a}{\partial L} = 0$ usw.; Entwickeln um Fixpunkt liefert dann kritische Exponenten.

6.7. Quantenphasenübergänge

Bisher: Phasenübergänge bei Variation von T ,
getrieben durch thermische Fluktuationen

In Quantensystemen kann Ordnung auch bei $T=0$ durch Quanten-
fluktuationen zerstört werden! Kontrollparameter ist dann z.B.

Druck, Magnetfeld, chemische Zusammensetzung. $\rightarrow$ **Quantenphasenübergänge**

Beispiel: Ising-Modell im transversalen Feld (z.B. LiHoF_4)

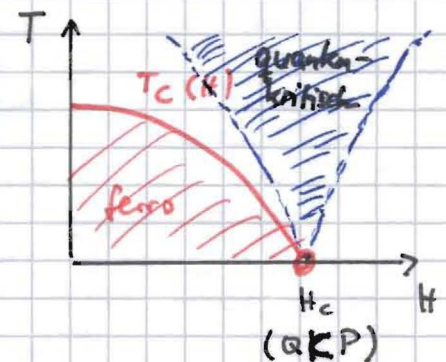
$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z + H \sum_i \hat{S}_i^x$$

Magnetfeld H induziert Tunneln zwischen $\uparrow$ und $\downarrow$ ($\hat{S}^x = (\hat{S}^+ + \hat{S}^-)/2$).

Ein kontinuierlicher Quantenphasenübergang
(hier bei $H = H_c$, $T=0$) führt zu
hochinteressanten Eigenschaften bei endlichen

Temperaturen (!) $\hat{=}$ **quantenkritisches**

Verhalten, da Grundzustand am
QKP ungewöhnliche Eigenschaften hat
(keine konventionellen Teilchen- oder wellenartigen
Anregungen).



Quantenphasenübergänge spielen eine große Rolle in der aktuellen
Festkörperphysik; sie sind für viele interessante Systeme
(Hochtemperatur-Supraleiter; Quanten-Hall-Systeme; ...)
von entscheidender Bedeutung.