Theoretical Physics (Master)

Prof. Dr. Matthias Vojta
TU Dresden

WS 2026/27

Einleitung und Motivation

Bisher: Klassische Mechanik
Elektrodynamik
Quantentheorie I + II
Statistische Physik
} sind Grundlage dieser Vorlesung (zweite Quantisierung!)

Hier: Theoretische Physik als Ganzes,
Betonung übergreifender Konzepte.
(z.B. Symmetrien und Symmetriebrechung,
Quantenmechanik und klassischer Grenzfall,
Hydrodynamik und Universalität,
Higgs-Mechanismus in Festkörper- und Teilchenphysik)

Dazu: Wiederholungen + neuer Stoff (bzw. neue Formulierung bekannten Stoffs)

Beispiele aus vielen Gebieten, mit Betonung auf Vielteilchensysteme und kondensierte Materie

Modul enthält
3 SWS Vorl } WS
1 SWS Üb }
1 SWS Tutorium } SS
3 SWS Selbststudium }

Mündliche Prfg 45 min über Grundlagen (3/4) + weiterführenden Stoff (1/4)

Literatur

- R. Shankar, Principles of quantum Mechanics
- F. Schwabl, Statistical Mechanics
- J. W. Negele / H. Orland, Quantum Many-Particle Systems
- P. M. Chaikin / T. C. Lubensky, Principles of Condensed Matter Physics
- D. Forster, Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetries, and Correlation Functions

Contents

1. Basic notions
2. Path integrals
3. Quantum mechanics in a magnetic field (+ Aharonov-Bohm)
4. Dynamics and response theory
5. Bose-Einstein condensation and superfluidity
6. Superconductivity and Anderson-Higgs mechanism
7. Topology and band structures
8. Hydrodynamics of many-body systems

1. Grundbegriffe

a) Klassische Mechanik (von Massenpunkten)

Zustand eines Systems $\hat{=}$ Phasenraumpunkt (q, p)

N Teilchen in d Dimensionen:
dN Orte, dN Impulse

Dynamik gegeben durch Hamilton-Fkt $H(q,p)$ und

Hamiltonsche Gleichungen $\dot{p}_j = -\partial H/\partial q_j$, $\dot{q}_j = +\partial H/\partial p_j$

Formulierung mit Poisson-Klammern (verallgemeinerbar!):

$$\{f, g\} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} \quad \rightsquigarrow \quad \{p, q\} = 1$$

$$\dot{q}_j = \{H, q_j\}, \quad \dot{p}_j = \{H, p_j\}$$

Allg. Observable:
$$\frac{d}{dt} A(q,p,t) = \{H, A\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Alternativ: Lagrange-Fkt $L(q, \dot{q})$ mit

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad \text{und} \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$\rightsquigarrow$ Dynamik aus Euler-Lagrange-Gl. (siehe unten)

p_j kanonisch konj.

b) Quantenmechanik

Zustand eines Systems $\hat{=}$ Vektor $|\psi\rangle$ in Hilbert-Raum ($\hat{=}$ reiner Zustand)

Observable $\hat{O} = \hat{O}^+$, $\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$. definiert Freiheitsgrade des Systems

Dynamik gegeben durch Hamilton-Op $\hat{H}$ und

Schrödinger-Gleichung $i\hbar \partial_t |\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$ (unitäre Zeitevolution)

Gemischte Zustände beschrieben durch Dichteoperator $\hat{\rho}$ ($\mathrm{Sp}\,\hat{\rho} = 1$), $\hat{\rho} = \hat{\rho}^+$

mit $\langle \hat{O} \rangle = \mathrm{Sp}(\hat{\rho}\hat{O})$

und $i\hbar \partial_t \hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]$

c) Übergang klassische Mechanik → Quantenmechanik

Erfordert „Quantisierung" (nicht eindeutig!)

Üblich: Kanonische Quantisierung $q \to \hat{q}$, $p \to \hat{p}$ mit $[\hat{p}_j, \hat{q}_j] = -i\hbar$ (kanonisch konj.)
(Poisson-Klammer durch Kommutator ersetzt)

d) Übergang Quantenmechanik → klassische Mechanik

Eindeutig, i.a. formal $\hbar \to 0$.

e) Wirkung und Euler-Lagrange-Gl.

$$S = \int dt\, L \longrightarrow \min$$

Universelles Prinzip der kleinsten Wirkung

Variation für diskrete Freiheitsgrade $L(q, \dot{q}, t)$ ergibt

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Variation für kont. Freiheitsgrade (Felder) mit Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu)$ und $L = \int d^d r\, \mathcal{L}$ ergibt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$$

Diese Euler-Lagrange-Gl. beschreiben die Systemdynamik.

f) Gibbs - Ensemble

Vielteilchensysteme im Gleichgewicht : Mittelung über Ensembles gleichartiger Systeme

Dichtematrix $\hat{\rho}$ folgt aus Maximierung der Entropie

$$S = -k \, Sp \, \hat{\rho} \ln \hat{\rho}$$

unter Nebenbedingungen (z.B. $E = const$ oder $\langle E \rangle = const$, $N = const$ oder $\langle N \rangle = const$ etc.)

Kanonisches Ensemble $\hat{\rho} = \frac{1}{Z_k} e^{-\beta \hat{H}}$, $\beta = 1/k_B T$, $Z_k = Sp \, e^{-\beta \hat{H}}$

$F = -kT \ln Z_k$

g) Symmetrien und Symmetriebrechung

Noether - Theorem: Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße.

QM: Symmetrie - Operation $\hat{S}$

Kontinuierliche Symmetrie mit Generator $\hat{g}$: $\hat{S} = e^{i \alpha \hat{g}}$ ($\hat{g}^+ = \hat{g}$)

z.B. Translation, Impuls

$[\hat{H}, \hat{S}] = 0 \iff [\hat{H}, \hat{g}] = 0$

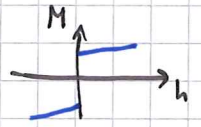
Spontane Symmetriebrechung : $[\hat{H}, \hat{S}] = 0$, aber $[\hat{\rho}, \hat{S}] \neq 0$.

Symmetriebrechung im Gibbs-Ensemble ($[\hat{H}, \hat{S}] = 0 \iff [e^{-\beta \hat{H}}, \hat{S}] = 0$):

Symmetriebrechendes Feld $\hat{H} \longrightarrow \hat{H} - h \hat{\phi}$, $\hat{\phi}$: Ordnungsparameter $[\hat{\phi}, \hat{S}] \neq 0$

Symmetriebrechung $\hat{=}$ Limes $h \to 0$ singulär

$$\lim_{h \to 0} \hat{\rho}(h) \neq \hat{\rho}(h=0)$$



Ferro-magnet

Symmetriebrechung erfordert thermodyn. Limes, da endliche Systeme keinen Phasenübergang bei $T > 0$ zeigen können ($e^{-\beta \hat{H}}$ = Produkt endlich vieler Exp.-fkt.)

↝ Symmetriebrechung $\hat{=}$ $\lim_{h \to 0} \lim_{N \to \infty} \ldots \neq \lim_{N \to \infty} \lim_{h \to 0} \ldots$