# 2. Pfadintegrale und Aharonov-Bohm-Effekt

Ziel: alternative Formulierung der Quantenmechanik, die dem klassischen Bild von Trajektorien (Pfaden) nahe kommt

Pfadintegrale sind ein zentrales Werkzeug für Vielteilchensysteme.

## 2.1. Erinnerung Gaußintegrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \text{(denn: } \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2}\right)^2 = \int dx\,dy\; e^{-\alpha(x^2+y^2)} = 2\pi \int_0^{\infty} dr\, r e^{-\alpha r^2} = \pi \int_0^{\infty} ds\, e^{-\alpha s} = \frac{\pi}{\alpha}\text{)}$$

↖ $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\frac{a}{2}x^2 + bx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\; e^{b^2/2a}$$

↑ quadratische Ergänzung

Matrizen und N-dim. Integrale: $\underline{\underline{A}}$ $N\times N$ reell symmetrisch, $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{O}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{O}}$, $\underline{\underline{D}}$ diag

$$\int d\underline{x}\; \exp\left(-\tfrac{1}{2}\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x}\right) \underset{\underline{x}' = \underline{\underline{O}}\,\underline{x}}{=} \int d\underline{x}'\; \exp\left(-\tfrac{1}{2}\underline{x}'^T \underline{\underline{D}}\, \underline{x}'\right) = (2\pi)^{N/2} (\det A)^{-1/2}$$

$$\int d\underline{x}\; \exp\left(-\tfrac{1}{2}\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} + \underline{j}^T \underline{x}\right) = (2\pi)^{N/2} (\det A)^{-1/2} \exp\left(\tfrac{1}{2}\underline{j}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{j}\right)$$

Erwartungswerte mit Verteilungsfkt $\exp\left(-\frac{1}{2}\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x}\right)$:

$$\langle f(\underline{x}) \rangle = \frac{\int d\underline{x}\; f(\underline{x}) \exp\left(-\frac{1}{2}\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x}\right)}{\int d\underline{x}\; \exp\left(-\frac{1}{2}\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x}\right)}$$

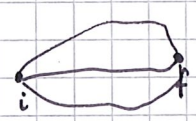
$$\langle x_i \rangle = 0$$

$$\langle x_i x_k \rangle = \frac{\int dx\; \frac{\partial}{\partial j_i} \frac{\partial}{\partial j_k} \exp\left(-\frac{1}{2}\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} + \underline{j}^T \underline{x}\right)\Big|_{j=0}}{\int d\underline{x}\; \exp\left(-\frac{1}{2}\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x}\right)} = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)_{ik}$$

## 2.2. Übergangsamplitude

Idee Pfadintegral : $\langle f|i\rangle = \sum_c \langle f|c\rangle\langle c|i\rangle = \sum_{cc'} \langle f|c\rangle\langle c|c'\rangle\langle c'|i\rangle$

$= \sum_{\text{Pfade}} A(i \to \dots \to f)$




Einzelnes Teilchen : Feynman - Pfadintegral

Vielteilchensysteme : Pfadintegral mit kohärenten Zuständen ( hier nicht)

Erinnerung Zeitentwicklung :

$$i\hbar\, \partial_t |\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$$

Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}$ :

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t')\,|\psi(t')\rangle$$

$$i\hbar\, \partial_t \hat{U}(t,t_0) = \hat{H}(t)\,\hat{U}(t,t_0) \quad \text{mit} \quad \hat{U}(t_0,t_0) = 1$$

Lsg $$\hat{U}(t,t_0) = 1 - \tfrac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}(t')\,\hat{U}(t',t_0)$$

Iterieren $$\hat{U}(t,t_0) = \hat{T}\exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{H}(t')\right)$$

↑ Zeitordnung (Operatoren zu kleineren Zeiten nach rechts)

( 2. Ordnung : $\frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt''\, \hat{H}(t')\hat{H}(t'')$ wird $= \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt''\, \hat{H}(t')\hat{H}(t'')$ )

$\hat{H}$ nicht zeitabh. :

$$\hat{U}(t,t_0) = \hat{U}(t-t_0) = \exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}\right)$$

# 2.3. Feynman - Pfadintegral

1 Teilchen mit Hamilton-Op $\hat{H}(\hat{q},\hat{p})$.

Ziel: Propagator $U(q_f,t_f;q_i,t_i) = \langle q_f | e^{-i/\hbar \hat{H}(t_f-t_i)} | q_i \rangle$

$\hat{=}$ Zeitentwicklungsop in Ortsdarstellung

Zeitdiskretisierung: in Schritten $\varepsilon = \frac{t_f - t_i}{M}$ (am Ende $M \to \infty$)

($\hat{=}$ Trotter-Zerlegung)

$t_n = t_i + n\varepsilon$ ; $t_0 = t_i$ , $t_M = t_f$
$q_0 = q_i$ , $q_M = q_f$

Einschieben von Eins-Operatoren für Zwischenschritte:

$$U(q_f t_f, q_i t_i) = \langle q_f | \left(e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}}\right)^M | q_i \rangle$$

$$= \int \prod_{k=1}^{M-1} d^d q_k \; \langle q_f | e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} | q_{M-1} \rangle \langle q_{M-1} | e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} | q_{M-2} \rangle$$
$$\langle q_{M-2} | \dots e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} | q_i \rangle$$

Umschreiben der Matrixelemente:

$$\langle q_n | e^{-i\varepsilon/\hbar \hat{H}(\hat{q},\hat{p})} | q_{n-1} \rangle = \int d^d p_n \; \underbrace{\langle q_n | p_n \rangle}_{\frac{e^{i q_n p_n/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{d/2}}} \langle p_n | e^{-i\varepsilon/\hbar \hat{H}(\hat{q},\hat{p})} | q_{n-1} \rangle$$

Zur Berechnung von $\langle p_n | e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}} | q_{n-1} \rangle$ : Näherung, die im Limes $\varepsilon \to 0$ exakt wird.

Dazu: Normalgeordneter Operator $:\hat{O}(\hat{q},\hat{p}):$ für jeden Op. $\hat{O}(\hat{q},\hat{p})$, wobei in Produkten $\hat{p}$ links und $\hat{q}$ rechts steht.

Beispiel: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$

$$\rightsquigarrow :e^{-i/\hbar \varepsilon \hat{H}}: = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m}\right)^k \left(V(\hat{q})\right)^{n-k}$$

Normalgeordneter Operator unterscheidet sich von ursprünglichem Op durch Kommutatoren:

$$e^{-i/\hbar\,\varepsilon\hat{H}(\hat{q},\hat{p})} = :e^{-i/\hbar\,\varepsilon H(\hat{q},\hat{p})}: - \left(\frac{\varepsilon}{\hbar}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\varepsilon/\hbar)^n}{(n+2)!} \left(\hat{H}^{n+2} - :\hat{H}:^{n+2}\right)$$

Wenn $e^{-i/\hbar\,\varepsilon\hat{H}}$ durch $:e^{-i/\hbar\,\varepsilon\hat{H}}:$ genähert wird, ist Fehler $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Matrixelemente mit $:e^{-i/\hbar\,\varepsilon\hat{H}}:$ ergeben sich direkt:

$$\langle p_n | :e^{-i\varepsilon/\hbar\,H(\hat{q},\hat{p})}: | q_{n-1}\rangle = e^{-i\varepsilon/\hbar\,H(q_{n-1},p_n)} \underbrace{\langle p_n | q_{n-1}\rangle}_{\frac{e^{i q_{n-1}p_n/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{d/2}}}$$

Es folgt:

$$U(q_f t_f; q_i t_i) = \lim_{M\to\infty} \int \prod_{k=1}^{M-1} \left(d^d q_k \frac{d^d p_k}{(2\pi\hbar)^d}\right) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{M} \left(p_k(q_k - q_{k-1}) - H(q_{k-1},p_k)\varepsilon\right)\right\}$$

Die Menge von Punkten $\{(q_k, p_k)\}$ kann als Trajektorie im Phasenraum verstanden werden. ACHTUNG: nicht kontinuierlich, nicht differentiierbar!

Im Limes $M\to\infty$ bietet sich symbolische Notation an:

$$\int \prod_{k=1}^{M-1} \left(d^d q_k \frac{d^d p_k}{(2\pi\hbar)^d}\right) \longrightarrow \int_{q_i t_i}^{q_f t_f} \mathcal{D}[q(t)]\,\mathcal{D}[p(t)]$$

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{M} p_k \frac{(q_k - q_{k-1})}{\varepsilon} \longrightarrow \int_{t_i}^{t_f} dt\; p\dot{q}$$

Dann

$$U(q_f t_f; q_i t_i) = \int \mathcal{D}[q] \int \mathcal{D}[p]\; \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt\; (p\dot{q} - H(q,p))\right)$$

Feynman-Pfadintegral im Phasenraum

(Randbed nur im Ortsraum!)

Für $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ lassen sich die Impulsintegrale ausführen:

$$\int \frac{d^d p_k}{(2\pi\hbar)^d} \; e^{i/\hbar \, p_k (q_k - q_{k-1}) - i/\hbar \, \frac{p_k^2}{2m} \varepsilon}$$

$$= \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{d/2} e^{i/\hbar \, \frac{m}{2} \frac{(q_k - q_{k-1})^2}{\varepsilon}}$$

Im Limes $M \to \infty$:

$$\int \prod_{k=1}^{M-1} d^d q_k \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{Md}{2}} \longrightarrow \int_{q_i t_i}^{q_f t_f} \mathcal{D}[q(t)]$$

$$\frac{(q_k - q_{k-1})^2}{\varepsilon^2} \longrightarrow \dot{q}^2$$

Dann:

$$\underline{K(q_f t_f ; q_i t_i) = \int_{q_i t_i}^{q_f t_f} \mathcal{D}[q] \; e^{i/\hbar \, S[q]}}$$

mit

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} dt \; L(q, \dot{q}, t) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right)$$

Feynman-Pfadintegral im Ortsraum

Diskussion

- Übergangsamplitude $\hat{=}$ Summe aller Pfade, gewichtet mit Phase.
  Phase ist Wirkung $S[q]$ in Einheiten von $\hbar$.

  Vgl. klassisch: $S \to \min$ ergibt einen Pfad,
  dies ist äquivalent zu einer Sattelpunktsnäherung des Pfadintegrals

- Pfadintegralformulierung kann als Grundlage der QM benutzt werden,
  Feynman, Rev. Mod. Phys. 20, 367 (1948)
  Feynman / Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (1965)

Allgemeine Zeitevolution einer Wellenfkt

$$|\psi(t_f)\rangle = \hat{U}(t_f, t_i)\,|\psi(t_i)\rangle$$

$$\langle q_f | \psi(t_f)\rangle = \int d^d q_i \; \langle q_f | \hat{U}(t_f, t_i) | q_i\rangle \langle q_i | \psi(t_i)\rangle$$

$$\psi(t_f, q) = \int d^d q' \; U(q\,t_f, q'\,t_i)\;\psi(t_i, q')$$

## 2.4. Pfadintegral in Imaginärzeit und Zustandssumme

Zustandssumme für 1 Teilchen:

$$Z = Sp\, e^{-\beta\hat{H}} = \int dq \, \langle q | e^{-\beta\hat{H}} | q \rangle$$

Wegen $e^{-\beta\hat{H}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(-i\hbar\beta)}$ entspricht dies einer Propagation in Imaginärzeit $\tau \left(t = -i\tau\right)$ hier $\tau_f - \tau_i = \beta\hbar$.

Pfadintegral für Evolution in Imaginärzeit (für $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$):

$$U(q_f \tau_f, q_i \tau_i) = \langle q_f | e^{-(\tau_f - \tau_i)\hat{H}/\hbar} | q_i \rangle$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int \prod_{k=1}^{M-1} \left( d^d q_k \, \frac{d^d p_k}{(2\pi\hbar)^d} \right) \exp\left( \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{M} \left( p_k (q_k - q_{k-1}) - \underbrace{\frac{\varepsilon}{\hbar}}_{\text{kein } i} H(q_{k-1}, p_k) \right) \right)$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int \prod_{k=1}^{M-1} d^d q_k \left( \frac{m}{2\pi\varepsilon\hbar} \right)^{\frac{Md}{2}} \exp\left( -\frac{\varepsilon}{\hbar} \sum_{k=1}^{M} \left( \frac{m}{2} \frac{(q_k - q_{k-1})^2}{\varepsilon^2} + V(q_{k-1}) \right) \right)$$

$$= \int \mathcal{D}[q(\tau)] \exp\left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left( \frac{m}{2} \left( \frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q(\tau)) \right) \right]$$

$$= \int_{q_i \tau_i}^{q_f t_f} \mathcal{D}[q(\tau)] \, e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \, H(q(\tau))}$$

**Achtung:** Realzeit & Lagrange-Fkt $\longleftrightarrow$ Imaginärzeit & Hamilton-Fkt

(Eigenschaft der Wick-Rotation $t \leftrightarrow i\tau$, denn $dq/d\tau = -i\, dq/dt \;\hat{=}$ Vorzeichenwechsel in kinetischer Energie)

Damit Zustandssumme $\hat{=}$ Summe über periodische (geschlossene) Pfade:

$$Z = \int dq \; U(q, t\beta; q, 0) = \int_{q(0) = q(\beta\hbar)} \mathcal{D}[q(\tau)] \, e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \, H(q(\tau))}$$

## 2.5. Freies Teilchen in 1d $\qquad H = \frac{p^2}{2m}$

$$U(q_f t_f, q_i t_i) = \langle q_f | e^{-i/\hbar \hat{p}^2/2m (t_f - t_i)} | q_i \rangle$$

$$= \int dp \; e^{-i/\hbar \, p^2/2m \, (t_f - t_i)} \; e^{i/\hbar \, p(q_f - q_i)} \; \frac{1}{2\pi\hbar}$$

$$= \left( \frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2} \exp\left( \underbrace{i \frac{m}{2\hbar} \frac{(q_f - q_i)^2}{t_f - t_i}}_{\frac{i}{\hbar} S_{kl}} \right)$$

denn:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \; L(q, \dot{q}, t) = \int dt \; \frac{m}{2} \dot{q}^2$$

$$S_{kl} = (t_f - t_i) \; \frac{m}{2} \left( \frac{q_f - q_i}{t_f - t_i} \right)^2$$

# 2.6. Harmonischer Oszillator (1d)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 \hat{q}^2$$

**Eigenzustände**

$$\psi_n(q) = c_n H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{q}{\ell}, \quad \ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!}\right)^{1/2}$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \tfrac{1}{2}\right)$$

$H_n(x) \hat{=}$ Hermite-Polynom

$H_0 = 1, \; H_1 = 2x, \; H_2 = -2 + 4x^2, \ldots$

**Wirkung** (klass.)

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2\right)$$

Klassische Bahn $q_{kl}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

Randbed. ↷

$$q_{kl}(t) = \frac{q_i \sin(\omega(t_f - t)) + q_f \sin(\omega(t - t_i))}{\sin(\omega(t_f - t_i))}$$

$$S[q_{kl}] = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T}\left[(q_f^2 + q_i^2)\cos \omega T - 2 q_f q_i\right] \qquad T = t_f - t_i$$

(Test $\omega \to 0 \hat{=}$ freies Teilchen: $S[q_{kl}] = \frac{m}{2}\frac{(q_f - q_i)^2}{T}$ )

**Pfadintegral** Entwickeln der Wirkung um klass. Pfad (exakt – s.u.):

$$q(t) = q_{kl}(t) + \chi(t)$$

$$S[q] = S[q_{kl}] + \underbrace{\int dt \left.\frac{\delta S}{\delta q(t)}\right|_{q_{kl}} \chi(t)}_{=0}$$

$$+ \frac{1}{2}\int dt\,dt' \left.\frac{\delta^2 S}{\delta q(t)\,\delta q(t')}\right|_{q_{kl}} \chi(t)\,\chi(t') + \ldots$$

2. Ableitung der Wirkung:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta q(t') \, \delta q(t)} = \frac{\delta}{\delta q(t')} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

Für $L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$: $\quad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -V'(q) - m\ddot{q}$

$$\delta \frac{\delta S}{\delta q(t)} = \int dt' \left( -V''(q(t')) \, \delta q(t') - m \, \delta \ddot{q}(t') \right) \delta(t-t')$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\delta^2 S}{\delta q(t') \, \delta q(t)} = \left( -V''(q(t)) - m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \delta(t-t')$$

Harmonischer Oszillator:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta q(t') \, \delta q(t)} = -m \, \delta(t-t') \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right)$$

Bem.: 3. und höhere Ordnungen verschwinden, da $L$ quadratisch in $q$!

$$\rightsquigarrow \quad S[q] = S[q_{kl}] + \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{m}{2} \chi^{\cdot 2} - \frac{m}{2} \omega^2 \chi^2 \right)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$U(q_f t_f, q_i t_i) = \int_{q_i t_i}^{q_f t_f} \mathcal{D}[q] \; e^{i/\hbar \, S[q]}$$

$$= e^{i/\hbar \, S[q_{kl}]} \underbrace{\int_{0 t_i}^{0 t_f} \mathcal{D}\chi \; e^{i/\hbar \, S[\chi]}}_{U(0, t_f; 0 t_i)}$$

Man kann zeigen: $U(0 t_f; 0 t_i) \propto \frac{1}{\sqrt{\sin \omega (t_f - t_i)}}$ (Altland/Simons)

$$\rightsquigarrow$$

$$U(q_f t_f; q_i t_i) = \left( \frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T} \right)^{1/2} \exp\left( \frac{i}{\hbar} S[q_{kl}] \right) \qquad T = t_f - t_i$$

Propagator harmonischer Osz.

mit $S[q_{kl}] = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} \left[ (q_f^2 + q_i^2) \cos \omega T - 2 q_f q_i \right]$

## Diskussion

- Limes $\omega \to 0$ reproduziert $U$ für freies Teilchen:

$$U(q_f t_f, q_i t_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{kl}\right)$$

$$\text{mit} \quad S_{kl} = \frac{m}{2} \frac{(q_f - q_i)^2}{T}$$

- Singularität bei $\sin \omega T = 0$:

Vielfache von halber Periode $\rightsquigarrow$ (klassisch) unmögliche Pfade für $q_i \neq q_f$

- Pfadintegral für Zustandssumme folgt aus:

$$U(q\,t\beta,\, q'0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh \hbar\omega\beta}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar \sinh \hbar\omega\beta}\left((q^2+q'^2)\cosh \hbar\omega\beta - 2qq'\right)\right]$$

$$\overset{!}{=} \sum_n e^{-\beta E_n} \underbrace{\langle q|n\rangle}_{\varphi_n(q)} \langle n|q'\rangle$$

$\beta \to \infty$: Ablesen von $E_0$ und $\varphi_0(q)$ !

Weiter:

$$Z = \mathrm{Sp}\, e^{-\beta H} = \int dq\; U(q, \hbar\beta, q', 0)$$

$$\overset{\text{Gauß-Int}}{=} \frac{1}{2 \sinh \frac{\hbar\omega\beta}{2}}$$

$$\overset{!}{=} \sum_n e^{-\beta E_n} \qquad \left(E_n = \hbar\omega\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\right)$$

# 2.7. Klassischer Grenzfall

Klassische Grenzfall $\hat{=}$ Wirkung $/\hbar$ groß $(\hbar \to 0)$

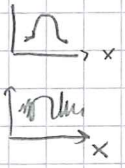
Klassische Bahn $S \to \min$

Propagator $U(q_f t_f, q_i t_i) = \int \mathcal{D}[q]\, e^{i/\hbar\, S[q]}$

Nötig: Behandlung schnell oszillierender Integranden

Betrachte: $I(\lambda) = \int dx\, e^{-\lambda \phi(x)}$ mit $\lambda \to \infty$

$\tilde{I}(\lambda) = \int dx\, e^{-i\lambda \phi(x)}$




Entwickeln um $x_0$ mit $\varphi'(x_0) = 0$ (Minimum); $\tilde{x} = x - x_0$:

$$I(\lambda) = e^{-\lambda\phi(x_0)} \int d\tilde{x}\; e^{-\lambda\left(\frac{1}{2}\varphi'' \tilde{x}^2 + \frac{1}{6}\varphi''' \tilde{x}^3 + \dots\right)}$$

$$= e^{-\lambda\phi(x_0)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int d\tilde{s}\; e^{-\frac{\varphi''}{2}\tilde{s}^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\varphi'''}{6}\tilde{s}^3 + \dots}$$

$\uparrow$ $\tilde{s}^2 = \lambda \tilde{x}^2$

Terme bis $\tilde{s}^2$:

$$I(\lambda) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \phi''(x_0)}}\, e^{-\lambda\phi(x_0)}$$

„Näherung des steilsten Anstiegs"

Analog

$$\tilde{I}(\lambda) \approx \sqrt{\frac{-2\pi i}{\lambda \phi''(x_0)}}\, e^{-i\lambda\phi(x_0)}$$

„Näherung der stationären Phase"

(Mehrere Pkt mit $\phi' = 0$ ⇝ summieren!)

Damit folgt

$$\int_{q_i t_i}^{q_f t_f} \mathcal{D}[q]\, e^{i/\hbar\, S[q]} \approx \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_f}}\, e^{i/\hbar\, S_{kl}}$$

mit $q_{kl}(t)$ aus $\delta S / \delta q \,\big|_{q_{kl}} = 0$.

Die 2. Ableitung von $S$ kann explizit ausgewertet werden für $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ mittels Entwicklung um den klass. Pfad: $q(t) = q_{kl}(t) + \chi(t)$. Dann:

$$S[q] = S[q_{kl}] + \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{m}{2}\dot{\chi}^2 - \frac{1}{2} V''(q_{kl}(t))\,\chi^2 \right) + \mathcal{O}(\chi^3)$$

Einsetzen in Näherung stationärer Phase:

$$\int_{q_i t_i}^{q_f t_f} \mathcal{D}[q]\; e^{i/\hbar\, S[q]} \approx e^{i/\hbar\, S_{kl}} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar\, f(t_f)}}$$

mit Funktion $f$: $\ddot{f} + \omega^2(t) f = 0$, $\omega^2(t) = \dfrac{V''(q_{kl}(t))}{m}$, $f(t_i) = 0$, $\dot{f}(t_i) = 1$.

## 2.9. Ausblick: Pfadintegrale mit kohärenten Zuständen

Feynman-Pfadintegral: Eigenzustände von $\hat{q}$ und $\hat{p}$

Pfadint. mit koh. Zuständen: Eigenzustände von $\hat{a}$ (Vernichtungsop)

Also: $a_\alpha |\phi\rangle = \phi_\alpha |\phi\rangle$ für $[a_\alpha, a_\alpha^+] = \delta_{\alpha\alpha'}$

Dann $Z = \mathrm{Sp}\, e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}$ mit $\hat{H}$ in 2. Quantisierung

Trotter-Zerlegung ergibt

$$\langle \phi_n | e^{-\varepsilon(\hat{H} - \mu\hat{N})} | \phi_{n-1} \rangle$$

Jetzt Normalordnung mit $a$ nach rechts, $a^+$ nach links für $\hat{H}(\hat{a}_\alpha^+, \hat{a}_\alpha)$:

$$\langle \phi_n | :e^{-\varepsilon(\hat{H} - \mu\hat{N})}: | \phi_{n-1} \rangle = \langle \phi_n | \phi_{n-1} \rangle e^{-\varepsilon\left[H(\phi^*_{\alpha n}, \phi_{\alpha n-1}) - \mu \sum_\alpha \phi^*_{\alpha n} \phi_{\alpha n-1}\right]}$$

Symbolisch:

$$Z = \int \mathcal{D}[\phi^*_\alpha(\tau), \phi_\alpha(\tau)] \exp\left[ -\int_0^{\hbar\beta} d\tau \sum_\alpha \phi^*_\alpha(\tau)(\partial_\tau - \mu)\phi_\alpha(\tau) + H(\phi^*_\alpha(\tau), \phi_\alpha(\tau)) \right]$$

Diese Formulierung ermöglicht flexible Darstellung von Vielteilchentheorie:

- Sattelpunktsnäherungen $\phi(\tau) \to \phi$ ($\hat{=}$ $a \to \langle a \rangle$)
- Energieabh. Wechselwirkung (nach Fourier-haf.)

Achtung: Fermionen erfordern besondere kohärente Zustände; Eigenwerte sind antikommutierende Grassmann-Zahlen.