Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2009

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

1. Übung

Zur Erinnerung:
Die Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ sind immer reell. Die Eigenvektoren sind orthogonal. Kommutierende, selbstadjungierte Operatoren sind simultan diagonalisierbar, d.h. sie besitzen einen gemeinsamen Satz von Eigenvektoren. Operatorwertige Funktionen $\hat{f}(\hat{A})$ sind über ihre Taylor-Reihe $\hat{f}(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}^{(n)}(0)\, \hat{A}^n/n!$ definiert.

1. **Translationsoperator:**

   a) Leiten Sie allein aus der Kenntnis der kanonischen Vertauschungsrelation $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ unter Verwendung der unitären Transformation $\hat{T}(\alpha) = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{q}}$ (mit α reell) das Spektrum (Menge aller Eigenwerte) des selbstadjungierten Operators $\hat{p}$ bezüglich der Zustandsvektoren $|p, \alpha\rangle = \hat{T}(\alpha)|p\rangle$ her. Deuten Sie den Operator $\hat{T}(\alpha)$.

   b) Sei $\psi(q) = \langle q|\psi\rangle$ eine Lösung der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung im Ortsraum. Leiten Sie anhand der Taylor-Entwicklung der Wellenfunktion $\psi(q + \alpha)$ um die Stelle q die Ortsdarstellung des Translationsoperators her.

2. **Harmonischer Oszillator:**

   a) Bestimmen Sie unter Verwendung der Vertauschungsrelation $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ das Spektrum des Hamiltonoperators

   $$\hat{H} = \frac{1}{2m}\,\hat{p}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2}\,\hat{q}^2 \,.$$

   Verwenden Sie dazu die Eigenschaften der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$, wobei $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega_0}\hat{p}\right)$.

   b) Zeigen Sie ferner, dass die n-Teilchenzustände $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle$ simultan Eigenzustände des Teilchenzahloperators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ sowie des Hamiltonoperator $\hat{H}$ sind.

3. **Leiteroperatoren:**
   Welche Information erhält man über das Spektrum der Operatoren

   $$\hat{\vec{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$$

   und $\hat{J}_z$ (die $\hat{J}_\alpha$ sind selbstadjungierte Operatoren) aus der Kommutatorrelation

   $$\left[\hat{J}_\alpha, \hat{J}_\beta\right] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{J}_\gamma\,? \qquad \text{(Summenkonvention)}$$

   Betrachten Sie dazu die Leiteroperatoren $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$. Sind letztere selbstadjungiert?