Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2009

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

3. Übung

1. **Sphärische Bessel-, Neumann- und Hankel-Funktionen:**

Die freie, stationäre Schrödinger-Gleichung für die Gesamtwellenfunktion $\psi_E(\vec{r})$ führt in Kugelkoordinaten nach der Separation des Winkelanteils ($Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$) auf die Radialgleichung

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \varepsilon\right\} R_\ell(r) = 0\,, \quad \varepsilon = \frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

bzw. nach der Substitution $x = kr$ auf die Differentialgleichung:

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} - \ell(\ell+1) + x^2\right\} z_\ell(x) = 0\,. \tag{1}$$

Diese Differentialgleichung ist vom Sturm-Liouvillschen Typ und besitzt zwei fundamentale, reelle Lösungsfunktionensysteme:

Sphärische Bessel-Funktionen	$z_\ell^{\text{reg}}(x) = j_\ell(x)$	(regulär bei $x = 0$)
Sphärische Neumann-Funktionen	$z_\ell^{\text{irr}}(x) = n_\ell(x)$	(irregulär bei $x = 0$)

Alternativ lassen sich komplexwertige Lösungssysteme, die sphärischen Hankel-Funktionen $h_\ell^{(\pm)}(x) = \pm i j_\ell(x) + n_\ell(x)$, als unabhängige Linearkombinationen finden.
(Bemerkung: In der Literatur ist die Definition $h_\ell^{(1/2)} = \mp i h_\ell^{(\pm)} = j_\ell \pm i\,(-n_l)$ zusammen mit $n_\ell \to -n_\ell$ weit verbreitet.)

a) Zeigen Sie für $\ell = 0$ durch direktes Lösen der DGL (1), dass gilt: $j_0(x) = \sin(x)/x$ und $n_0(x) = \cos(x)/x$.

b) Leiten Sie die Rayleighschen Formeln aus der Differentialgleichung (1) her (Faktor $(-1)^\ell$ Konvention):

$$j_\ell(x) = (-1)^\ell\, x^\ell \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\ell \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\,, \qquad n_\ell(x) = (-1)^\ell\, x^\ell \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\ell \left(\frac{\cos(x)}{x}\right)\,.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $z_\ell(x) = (-1)^\ell\, x^\ell y_\ell(x)$ und zeigen dann zunächst den Zusammenhang: $y'_\ell(x) = x y_{\ell+1}(x)$)

c) Überzeugen Sie sich von der Gültigkeit des asymptotischen Verhaltens (für $x \to \infty$):

$$j_\ell(x) \sim \frac{1}{x}\,\sin(x - \frac{\ell\pi}{2})\,, \qquad n_\ell(x) \sim \frac{1}{x}\,\cos(x - \frac{\ell\pi}{2})\,.$$

– bitte wenden –

d) Zeigen Sie, dass die jeweiligen Wronski-Determinanten gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} W(j_\ell, n_\ell) &= j_\ell(x) n'_\ell(x) - j'_\ell(x) n_\ell(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad \left(j'_\ell(x) = \frac{dj_\ell(x)}{dx}\right) \\ W(h_\ell^{(+)}, h_\ell^{(-)}) &= h_\ell^{(+)}(x) h_\ell^{(-)\prime}(x) - h_\ell^{(+)\prime}(x) h_\ell^{(-)}(x) = -\frac{2i}{x^2}. \end{aligned}$$

Notieren Sie die entsprechenden Formeln für die sphärischen Hankel-Funktionen $h_\ell^{(\pm)}$.

2. **Streuung am sphärischen Potentialtopf:**

Betrachten Sie die Streuung am Potential $V(r) = -V_0\,\Theta(R-r)$ mit $V_0 > 0$.

a) Lösen Sie das stationäre Streuproblem und leiten Sie die Streuphasen $\delta_\ell(k)$ her.

$$\begin{aligned} (\text{Lösung}: \quad e^{2i\delta_\ell(k)} &= \frac{j_\ell(\kappa R) h_\ell^{(-)\prime}(kR) - j'_\ell(\kappa R) h_\ell^{(-)}(kR)}{j_\ell(\kappa R) h_\ell^{(+)\prime}(kR) - j'_\ell(\kappa R) h_\ell^{(+)}(kR)}, \\ \kappa^2 &= k^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2} \equiv k^2 + \kappa_0^2\,.) \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass das Ergebnis aus Teil (a) für s-Wellenstreuung ($\ell = 0$) auf die Beziehung

$$\tan(kR + \delta_0(k)) = \frac{k}{\kappa}\tan(\kappa R)$$

führt.

c) Betrachten Sie nun den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot}. Was ergibt sich im Grenzfall $kR \ll 1$ und in welcher Beziehung steht das Ergebnis zur sogenannten Streulänge

$$a = R\left[1 - \frac{\tan(\kappa_0 R)}{\kappa_0 R}\right]?$$