Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2009

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

6. Übung

1. **Greenscher Operator und Zustandsdichteoperator:**

   Der retardierte (avancierte) Greensche Operator $\hat{G}^{(\pm)}(E)$ enthält alle relevante Information über das Energiespektrum $\{E_n\}$ des Hamilton-Operators $\hat{H}$, wie an seiner Spektraldarstellung $\hat{G}^{(\pm)}(E) = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{E - E_n \pm i\epsilon}$ ersichtlich wird.

   a) Der Cauchysche Hauptwert $P\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z}{z^2 + \epsilon^2}$ ist operativ über das Integral

   $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, f(z)\, P\left(\frac{1}{z}\right) &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} dz\, f(z)\, \frac{z}{z^2 + \epsilon^2} + \int_{+\epsilon}^{+\infty} dz\, f(z)\, \frac{z}{z^2 + \epsilon^2} \right) \\ &\equiv \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \right) dz\, \frac{f(z)}{z}\end{aligned}$$

   definiert. Zeigen Sie die Diracsche Identität: $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\, \delta(x)$.

   b) Leiten Sie ausgehend von der Spektraldarstellung des Greenschen Operators eine Identität zwischen dem (hermitschen) spektralen Zustandsdichteoperator $\hat{\eta}(E) = \sum_n \delta(E - E_n)\, |n\rangle\langle n|$ und den Greenschen Operatoren $\hat{G}^{(\pm)}(E)$ her.

2. **Pfadintegraldarstellung der zeitabhängigen Greenschen Funktion:**

   Die Lagrange-Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet $L(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2(t) - \omega^2 x^2(t))$. Zeigen Sie in dieser Aufgabe, dass der Pfadintegralausdruck für die dazugehörige Greensche Funktion

   $$G(x_a, t_a; x_b, t_b) = \int_{(x_a, t_a)}^{(x_b, t_b)} \mathcal{D}[x(t)]\, \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt\, L(x(t), \dot{x}(t)) \right) \equiv \int_{(x_a, t_a)}^{(x_b, t_b)} \mathcal{D}[x(t)]\, \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)] \right)$$

   sich nach der Separation des Anteils des klassischen Pfades $x_{kl}(t)$ zur Wirkung $S_{kl} \equiv S[x_{kl}(t)]$ in der Form

   $$\langle x_b |\, \hat{U}(t_b, t_a)\, | x_a \rangle = G(x_a, t_a; x_b, t_b) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{kl}}\, \mathcal{F}_\omega(t_a, t_b)$$

   schreiben läßt. Damit reduziert sich die Berechnung der Pfadintegraldarstellung von G auf die Berechnung der Wirkung S_{kl} entlang des klassischen Pfades $x_{kl}(t)$ und der Funktion $\mathcal{F}_\omega(t_a, t_b)$.

– bitte wenden –

a) Berechnen Sie die Wirkung des harmonischen Oszillators $S[x_{kl}(t)]$ entlang des klassischen Pfades mit den Randwerten $x_{kl}(t_a) = x_a$ und $x_{kl}(t_b) = x_b$ mit $T = t_b - t_a$.
(Hinweis: Berechnen Sie zuerst die klassischen Pfad $x_{kl}(t)$ als Lösung der Euler-Lagrange Gleichung unter den gegebenen Randbedingungen.)

b) Zeigen Sie, dass für das Wirkungsintegral $S[x(t)]$ entlang eines beliebigen Pfades $x(t) = x_{kl}(t) + y(t)$, welcher die Randpunkte x_a und x_b verbindet, der Ausdruck resultiert:

$$S[x(t)] = S[x_{kl}(t)] + \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \frac{m}{2}\, \left(\dot{y}^2(t) - \omega^2 y^2(t)\right) \equiv S[x_{kl}(t)] + \delta S[y(t)]\,,$$

wobei für die Abweichung $y(t)$ vom klassischen Pfad $y(t_a) = y(t_b) = 0$ gilt.

c) Betrachten Sie konkret $t_a = 0, t_b = T$ und berechnen Sie das Pfadintegral

$$\mathcal{F}_\omega(t_a, t_b) \equiv \mathcal{F}_\omega(T) = \int\limits_{(0,0)}^{(0,T)} \mathcal{D}[y(t)]\, \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int\limits_0^T dt\, \frac{m}{2}\, \left(\dot{y}^2(t) - \omega^2 y^2(t)\right)\right].$$

(Hinweise: Verwenden Sie

- den Fourier-Sinus-Reihenansatz für beliebige Abweichungen: $y(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi t}{T})$,
- die Orthogonalitätsrelation: $\int\limits_0^{2\pi} dx\, \cos(mx)\, \cos(nx) = \pi\, \delta_{m,n}$ für $m, n \neq 0$, um $\delta S[y(t)] \equiv \delta S[a_n]$ auszuwerten,
- gegebenenfalls auch das Zwischenergebnis ($\mathcal{J}$ ist ein Proportionalitätsfaktor):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\omega(T) &= \mathcal{J} \prod_{n=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{mT}{4\pi i\hbar}}\, da_n \exp\left\{\frac{imT}{4\hbar}\left(\frac{n^2\pi^2}{T^2} - \omega^2\right) a_n^2\right\} \\
&= \mathcal{J} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2\pi^2}{T^2} - \omega^2\right)^{-1/2},
\end{aligned}$$

- die Produktdarstellung: $\sin(x) = x \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$,
- das Resultat aus der Vorlesung $\mathcal{F}_0(T) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}$ für ein frei propagierendes Teilchen, welches im Grenzfall $\omega = 0$ auch aus der Funktion $\mathcal{F}_\omega(T)$ entstehen muß, um den (gemeinsamen) Proportionalitätsfaktor zu bestimmen
- das Endresultat

$$\mathcal{F}_\omega(T) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\, \sin(\omega T)}\right)^{1/2}$$

zum Vergleich mit Ihrem Ergebnis.)