Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II   SS 2009

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

7. Übung

1. **Gleichzeitkommutationsrelationen für das freie Maxwell-Feld:**

   Gegeben sei die Eigenmodenentwicklung des elektromagnetischen Vektorpotentials in Coulomb-Eichung: $\hat{\vec{A}}(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \sum_\sigma \left(\hat{a}_{\vec{k}\sigma}\, \vec{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma}\, e^{-i\omega_k t}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}\sigma}\, \vec{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma}\, e^{i\omega_k t}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right)$.

   Die Operatoren $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}\sigma}$ ($\hat{a}_{\vec{k}\sigma}$) sind Erzeuger (Vernichter) von Photonen der Mode $\vec{k},\sigma$ (Wellenvektor, Polarisation) und $\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma}$ bezeichtet den Polarisationsvektor linear polarisierter Wellen. Es gelten die Vertauschungsrelationen: $[\hat{a}_{\vec{k}\sigma}, \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}] = 0 = [\hat{a}^\dagger_{\vec{k}\sigma}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}'\sigma'}]$ sowie $[\hat{a}_{\vec{k}\sigma}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}'\sigma'}] = \delta_{\sigma\sigma'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$.

   a) Verifizieren Sie, dass für die folgenden Gleichzeitkommutatoren gilt (Kartesische Komponenten):

      i. $[\hat{A}_i(\vec{r},t), \hat{A}_j(\vec{r}\,',t)] = 0$,

      ii. $[\partial_t\, \hat{A}_i(\vec{r},t), \partial_t\, \hat{A}_j(\vec{r}\,',t)] = 0$,

      iii. $[\hat{A}_i(\vec{r},t), \partial_t\, \hat{A}_j(\vec{r}\,',t)] = i\hbar\, \delta^{\text{trans.}}_{ij}(\vec{r}-\vec{r}\,')$ mit der transversalen δ-Funktion

      $$\delta^{\text{trans.}}_{ij}(\vec{r}-\vec{r}\,') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = \left(\delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\Delta} \partial_j \right) \delta(\vec{r}-\vec{r}\,').$$

   b) Was folgt somit für die Kommutatoren zwischen jeweiligen Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder? Berechnen Sie einige der Kommutatoren (nach Ihrer Wahl):

      $$[\hat{B}_i(\vec{r},t), \hat{B}_j(\vec{r}\,',t)]\,, \qquad [\hat{E}_i(\vec{r},t), \hat{E}_j(\vec{r}\,',t)]\,, \qquad [\hat{B}_i(\vec{r},t), \hat{E}_j(\vec{r}\,',t)]\,.$$

      Was bedeutet dies hinsichtlich der Meßbarkeit von Feldern?

2. **Erzeuger und Vernichter für Photonen:**

   Wir betrachten eine Mode des quantisierten, freien elektromagnetischen Feldes charakterisiert durch Wellenzahl $\vec{k}$ (Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$), Polarisation σ, und Kreisfrequenz ω_k und bezeichnen mit $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}\sigma} \equiv \hat{a}^\dagger$ bzw. $\hat{a}_{\vec{k}\sigma} \equiv \hat{a}$ den Erzeuger bzw. den Vernichter für ein entsprechendes Photon. Gegeben seien die Operatorfunktionen $\hat{f}(\hat{a}^\dagger)$ und $\hat{f}(\hat{a})$.

– bitte wenden –

Zeigen Sie, dass gilt:

a) $[\hat{a}, \hat{f}(\hat{a}^\dagger)] = \dfrac{\partial \hat{f}(\hat{a}^\dagger)}{\partial \hat{a}^\dagger}$,

b) $[\hat{a}^\dagger, \hat{f}(\hat{a})] = -\dfrac{\partial \hat{f}(\hat{a})}{\partial \hat{a}}$,

c) $[\hat{a}, e^{\lambda \hat{a}^\dagger}] = \lambda\, e^{\lambda \hat{a}^\dagger}$, $\qquad [\hat{a}^\dagger, e^{\lambda \hat{a}}] = -\lambda\, e^{\lambda \hat{a}}$

3. **Kohärenter Zustand:**

Gegeben sei ein kohärenter Zustand definiert über $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)\,|0\rangle$ mit dem Verschiebungsoperator $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}$ (Multiphotonenzustand aus einer Feldmode).

Überprüfen Sie die folgenden Eigenschaften eines kohärenten Zustandes bzw. des Verschiebungsoperators:

a) $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$,
b) $\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha) = [\hat{D}(\alpha)]^{-1} \equiv \hat{D}^{-1}(\alpha)$,
c) $\hat{D}^\dagger(\alpha)\,\hat{a}\,\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$,
d) $\hat{D}^\dagger(\alpha)\,\hat{a}^\dagger\,\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*$.

4. **Quantenfluktuationen:**

Die Schwankung (Varianz) $(\Delta A)^2$ eines Operators $\hat{A}$ bezüglich des Quantenzustands $|\psi\rangle$ ist gemäß $(\Delta A)^2 = \langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^2$ definiert. Überzeugen Sie sich davon, dass die Varianz der elektromagnetischen Feldoperatoren $\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)$ und $\hat{\vec{B}}(\vec{r},t)$ bezüglich des Vakuumzustands $|0\rangle$ nicht verschwinden ("Quantenvakuumfluktuationen").

Zeigen Sie, dass sich die Nullpunktsenergie E_0 des elektromagnetischen Feldes formal durch die Varianz der (lokalen) Energiedichte des elektromagnetischen Feldes bezüglich des Vakuumzustands ausdrücken lässt:
$E_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int d^3r\,\Big\{(\Delta\vec{E}(\vec{r},t))^2 + (\Delta\vec{B}(\vec{r},t))^2\Big\}$.