Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2009

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

9. Übung

1. **Schrödinger-Feld:**

Betrachten Sie das komplexe Schrödinger-Feld $\psi(\vec{r},t)$, wobei in diesem Fall ψ und ψ^* als unabhängige Felder zu verstehen sind.

a) Formulieren Sie eine Lagrange-Dichte für das klassische Schrödinger-Feld $\mathcal{L}(\psi(\vec{r},t), \partial_t\psi(\vec{r},t), \vec{\nabla}\psi(\vec{r},t); \psi^*(\vec{r},t), \partial_t\psi^*(\vec{r},t), \vec{\nabla}\psi^*(\vec{r},t))$ derart, dass die aus dem Variationsprinzip

$$\delta\, S[\psi,\psi^*] = \delta \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \int\limits_V d^3r\, \mathcal{L}(\psi(\vec{r},t), \partial_t\psi(\vec{r},t), \vec{\nabla}\psi(\vec{r},t); \psi^*(\vec{r},t), \partial_t\psi^*(\vec{r},t), \vec{\nabla}\psi^*(\vec{r},t)) = 0$$

folgenden Euler-Langrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\vec{\nabla}\psi\right)} = 0\,, \qquad \text{(entsprechende Gleichung für } \psi^*\text{)}$$

die Schrödinger-Gleichung $i\hbar\,\partial_t\,\psi(\vec{r},t\,) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta + V(\vec{r}\,)\right)\psi(\vec{r},t\,) \equiv h(\vec{r}\,)\psi(\vec{r},t\,)$ sowie die entsprechende Gleichung für das komplex-konjugierte Feld ψ^* liefert.

b) Verifizieren Sie, dass $\pi(\vec{r},t\,) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi(\vec{r},t\,)/\partial t)} = i\hbar\,\psi^*(\vec{r},t\,)$ der zu $\psi(\vec{r},t\,)$ kanonisch konjugierte Feldimpuls ist.

c) Formulieren Sie die Hamilton-Dichte $\mathcal{H}(\psi,\pi,\psi^*,\pi^*)$ sowie das Hamilton-Funktional $H[\psi,\pi,\psi^*,\pi^*] = \int d^3r\,\mathcal{H}(\psi,\pi,\psi^*,\pi^*)$.

d) Postulieren Sie nun kanonische (Gleichzeit-)Kommutationsrelationen:

$$[\hat{\psi}(\vec{r},t), \hat{\pi}(\vec{r}\,',t)] = i\hbar\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,, \qquad [\hat{\psi}(\vec{r},t), \hat{\psi}(\vec{r}\,',t)] = 0 = [\hat{\pi}(\vec{r},t), \hat{\pi}(\vec{r}\,',t)]$$

und zeigen Sie, dass die Heisenbergsche Bewegungsgleichung $\partial_t\hat{\psi}(\vec{r},t) = \frac{i}{\hbar}\,[\hat{H},\hat{\psi}(\vec{r},t)]$ für den Feldoperator $\hat{\psi}(\vec{r},t)$ (im Heisenberg-Bild) auf die Schrödinger-Gleichung für $\hat{\psi}(\vec{r},t)$ führt.

e) Gegeben sei die Entwicklung des Feldoperators nach dem vollständigen, orthonormalen Satz von Einteilchenwellenfunktionen $\phi_\alpha(\vec{r}\,)$ in der Form: $\hat{\psi}(\vec{r},t) = \sum\limits_\alpha \hat{c}_\alpha(t)\,\phi_\alpha(\vec{r}\,)$, wobei $h(\vec{r}\,)\phi_\alpha(\vec{r}\,) = \varepsilon_\alpha\,\phi_\alpha(\vec{r}\,)$.
Zeigen Sie, dass die kanonischen Gleichzeitkommutationsrelationen zwischen ψ und π auf die Kommutationsrelation $[\hat{c}_\alpha, \hat{c}^\dagger_{\alpha'}] = \delta_{\alpha\,\alpha'}$ etc. führen.

– bitte wenden –

2. **Bosonensystem in zweiter Quantisierung:**

Betrachten Sie ein System wechselwirkender, massiver Spin-0-Bosonen in einem externen Potential $V(\vec{r})$ und mit einem Zweiteilchenwechselwirkungspotential $U(\vec{r}, \vec{r}\,')$. Das System wird im Schrödinger-Bild durch die Feldoperatoren $\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})$ beschrieben mit $[\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}\,')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$. Der (nichtrelativistische) Hamilton-Operator lautet dann

$$\hat{H} = \int d^3r\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right) \hat{\psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2}\int d^3r d^3r'\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}\,')\, U(\vec{r}, \vec{r}\,')\, \hat{\psi}(\vec{r}\,')\hat{\psi}(\vec{r})$$

und der Teilchenzahloperator $\hat{N} = \int d^3r\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{r})$. Wir definieren ferner die Einteilchenzustände $|\phi_1\rangle = \int d^3r\, \phi_1(\vec{r})\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})|0\rangle$ sowie die Zweiteilchenzustände $|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3r\, d^3r'\, \phi_2(\vec{r}, \vec{r}\,')\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}\,')|0\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass die Teilchenzahl eine Erhaltungsgröße des Systems ist.

b) Zeigen Sie ferner: $\hat{N}|\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle$ und $\hat{N}|\phi_2\rangle = 2\,|\phi_2\rangle$, d.h. die oben definierten Zustände $|\phi_1\rangle$ und $|\phi_2\rangle$ sind tatsächlich Zustände mit fester Teilchenzahl 1 bzw. 2.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Teilchendichte $\hat{\rho}(\vec{r}) = \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{r})$ im Ein- und Zweiteilchenzustand: $\langle\phi_1|\hat{\rho}(\vec{r})|\phi_1\rangle$ und $\langle\phi_2|\hat{\rho}(\vec{r})|\phi_2\rangle$.

d) In zweiter Quantisierung ist der Ortsoperator durch $\hat{\vec{r}} = \int d^3r\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\, \vec{r}\, \hat{\psi}(\vec{r})$ und der Impulsoperator durch $\hat{\vec{p}} = \int d^3r\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\, (-i\hbar\vec{\nabla}\,)\, \hat{\psi}(\vec{r})$ gegeben. Überzeugen Sie sich davon, dass die Erwartungswerte $\langle\phi_1|\hat{\vec{r}}|\phi_1\rangle$ und $\langle\phi_1|\hat{\vec{p}}|\phi_1\rangle$ mit denen der gewohnten Einteilchenquantenmechanik übereinstimmen.

e) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Zweiteilchenwechselwirkungsenergie

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\int d^3r d^3r'\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}\,')\, U(\vec{r}, \vec{r}\,')\, \hat{\psi}(\vec{r}\,')\hat{\psi}(\vec{r})$$

im Ein- und Zweiteilchenzustand.