Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2009

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

10. Übung

1. **Fermionensystem:**

   Sei $\hat{c}^\dagger_{\alpha_i}(\hat{c}_{\alpha_i})$ ein Erzeuger (Vernichter) eines Fermions mit Quantenzahlen α_i.

   a) Geben Sie für ein Fermionensystem die zu $\hat{c}^\dagger_{\alpha_1}\,\hat{c}_{\alpha_2}\,\hat{c}^\dagger_{\alpha_4}\,\hat{c}^\dagger_{\alpha_6}\,\hat{c}^\dagger_{\alpha_2}\,|0\rangle$, $\hat{c}^\dagger_{\alpha_1}\,\hat{c}_{\alpha_4}\,\hat{c}_{\alpha_2}\,\hat{c}^\dagger_{\alpha_7}\,\hat{c}^\dagger_{\alpha_4}\,|0\rangle$ und $\hat{c}^\dagger_{\alpha_3}\,\hat{c}^\dagger_{\alpha_2}\,\hat{c}^\dagger_{\alpha_4}\,\hat{c}^\dagger_{\alpha_6}\,\hat{c}^\dagger_{\alpha_2}\,|0\rangle$, gehörenden Zustände $|n_{\alpha_1}, n_{\alpha_2}, n_{\alpha_3}, \dots, n_{\alpha_i}, \dots\rangle$ an.

   b) Zeigen Sie, dass für die Besetzungszahloperatoren gilt: $\hat{n}^2_{\alpha_i} = \hat{n}_{\alpha_i}$. Was impliziert dies für die möglichen Eigenwerte von $\hat{n}_{\alpha_i}$?

   c) Der Gesamtanzahloperator ist definiert als $\hat{N} = \sum_i \hat{n}_{\alpha_i}$. Welcher Zusammenhang ergibt sich zwischen $\hat{N}^2$ und $\hat{N}$?

   d) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{\rho}(\vec{r}\,), \hat{\rho}(\vec{r}\,')]$ zwischen dem Einteilchendichteoperator an verschiedenen Orten. Verwenden Sie dabei $\hat{\rho}(\vec{r}\,) = \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}\,)\hat{\psi}(\vec{r}\,)$ sowie die Darstellung $\hat{\psi}(\vec{r}\,) = \sum_i \hat{c}_{\alpha_i}\,\phi_{\alpha_i}(\vec{r}\,)$.

2. **Schrödinger- und Heisenberg-Bild:**

   Im Schrödinger-Bild wird die Dynamik eines Quantensystems durch einen Zustandsvektor $|\Phi_S(t)\rangle$ beschrieben, der die Schrödinger-Gleichung $i\hbar\,\partial_t\,|\Phi_S(t)\rangle = \hat{H}_S(t)\,|\Phi_S(t)\rangle$ erfüllt. Die Zeitentwicklung von $|\Phi_S(t)\rangle$ wird durch den unitären Operator $\hat{U}_S(t,t_0)$ vermittelt: $|\Phi_S(t)\rangle = \hat{U}_S(t,t_0)\,|\Phi_S(t_0)\rangle$.
   Für beliebige Operatoren $\hat{O}_S$ (im Schrödinger-Bild), welche physikalischen Observablen entsprechen, gilt dann $\partial_t\hat{O}_S = 0$. Die Erwartungswerte $\langle\,\hat{O}_S\,\rangle = \langle\Phi_S(t)|\hat{O}_S\,|\Phi_S(t)\rangle$ sind i.A. zeitabhängig und ferner invariant unter unitären (Bild-)Transformationen $\hat{A}(t)$ der Zustandsvektoren $|\Phi(t)\rangle = \hat{A}(t)\,|\Phi_S(t)\rangle$. Der Operator $\overset{\circ}{\hat{O}}_S$ der zeitlichen Änderung der Observablen ist formal definiert über die Gleichung $\dfrac{d}{dt}\,\langle\,\hat{O}_S\,\rangle = \langle\,\overset{\circ}{\hat{O}}_S\,\rangle = \langle\Phi_S(t)|\overset{\circ}{\hat{O}}_S|\Phi_S(t)\rangle$.

   a) Leiten Sie die formale Bewegungsgleichung $\overset{\circ}{\hat{O}}_S = \dfrac{i}{\hbar}\,[\hat{H}_S, \hat{O}_S]$ her.

   b) Wie lautet die Bewegungsgleichung für den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_S(t,t_0)$ und unter welcher maßgeblichen Bedingung besitzt diese die formale Lösung $\hat{U}_S(t,t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{H}_S(t')\right\}$?

   c) Leiten Sie die Bedingungsgleichung für die Bildtransformation $\hat{A}(t)$ her, sodass der transformierte Zustandsvektor zeitunabhängig ist, d.h. $\partial_t|\Phi_H\rangle = 0$ gilt (Heisenberg-Bild).

– bitte wenden –

d) Begründen Sie das Transformationsgesetz für Operatoren $\hat{O}_H(t) = \hat{A}(t)\hat{O}_S\hat{A}^+(t)$. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für Observablen im Heisenberg-Bild die Form annimmt: $\partial_t \hat{O}_H(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}_H(t), \hat{O}_H(t)]$.

e) Für ein abgeschlossenes System ist $\hat{H}_S$ zeitunabhängig. Welche konkrete Gestalt resultiert dann für die Bildtransformation $\hat{A}(t)$?

3. **Globale Phasentransformationen und Ladungserhaltung:**

Gegeben sei die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ eines komplexen Skalarfeldes $\phi(\vec{r},t)$ (Schrödinger- oder Klein-Fock-Gordon-Feld) zusammen mit dem Wirkungsfunktional

$$S[\phi,\phi^*] = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_V d^3r\, \mathcal{L}(\phi, \partial_t\phi, \vec{\nabla}\phi, \phi^*, \partial_t\phi^*, \vec{\nabla}\phi^*)\,.$$

Unter einer globalen Phasentransformation $U(\alpha) = e^{i\alpha}$ (mit α reell und konstant) transformieren sich die Felder ϕ und ϕ^* gemäß

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r},t) \quad &\longrightarrow \quad \tilde{\phi}(\vec{r},t) = e^{i\alpha}\phi(\vec{r},t) = \phi(\vec{r},t) + \delta_\alpha\phi(\vec{r},t)\,, \\ \phi^*(\vec{r},t) \quad &\longrightarrow \quad \tilde{\phi}^*(\vec{r},t) = e^{-i\alpha}\phi^*(\vec{r},t) = \phi^*(\vec{r},t) + \delta_\alpha\phi^*(\vec{r},t)\,. \end{aligned}$$

(Bemerkung: Entsprechendes läßt sich unmittelbar auf die quantisierten Felder übertragen.)

a) Betrachten Sie nun infinitessimale Phasentransformationen $U(\alpha) = (1 + i\alpha) + \mathcal{O}(\alpha^2)$ und zeigen Sie, dass die Änderung der Langrange-Dichte gegeben ist durch

$$\delta_\alpha\mathcal{L} = i\alpha\left\{\partial_t\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}\,\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi^*)}\,\phi^*\right] - \vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\phi)}\,\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\phi^*)}\,\phi^*\right]\right\}\,.$$

b) Zeigen Sie, dass im Fall der Invarianz der Wirkung unter (inf.) Phasentransformationen, d.h. falls $\delta S[\phi,\phi^*] = S[\tilde{\phi},\tilde{\phi}^*] - S[\phi,\phi^*] = 0$ gilt, die

$$\text{Dichte} \quad \rho \;=\; -i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}\,\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi^*)}\,\phi^*\right) = -i(\pi\phi - \pi^*\phi^*) \tag{1}$$

$$\text{und die Stromdichte} \quad \vec{j} \;=\; -i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\phi)}\,\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\phi^*)}\,\phi^*\right) \tag{2}$$

die Kontinuitätsgleichung $\partial_t\rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0$ erfüllen.

c) Zeigen Sie, dass $Q = -i\int\limits_V d^3r\,\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}\,\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi^*)}\,\phi^*\right)$ eine Erhaltungsgröße ist.

d) Berechnen Sie gemäß Gl. (1) und (2) für die Lagrange-Dichte des Schrödinger-Feldes

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\,(\psi^*(\partial_t\psi) - (\partial_t\psi^*)\psi) - \frac{\hbar^2}{2m}\,(\vec{\nabla}\psi^*)\cdot(\vec{\nabla}\psi) - V\psi^*\psi\,.$$

Dichte und Stromdichte. (Da die Lagrange-Dichte aus Bilinearformen der Felder ϕ^*, ϕ aufgebaut sind, gilt $\delta_\alpha\mathcal{L} = 0$ und somit die Kontinuitätsgleichung.)