Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2009

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

11. Übung

1. **Nichtrelativistischer Grenzfall der Klein-Fock-Gordon Gleichung:**

   Leiten Sie ausgehend von der Lagrange-Dichte (hier: $\int d^3r\,\mathcal{L}$ hat Dimension einer Energie)

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{c^2}\,\partial_t\phi^*(\vec{r},t)\partial_t\phi(\vec{r},t) - \vec{\nabla}\phi^*(\vec{r},t)\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\phi^*(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t)\right)$$

   des freien Klein-Fock-Gordon Feldes, unter Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabe 3, der 10. Übung, die Ausdrücke für die Dichte ρ und die Stromdichte $\vec{j}$ her.
   Zeigen Sie ferner, dass im nichtrelativistischen (nr) Grenzfall ($\phi(\vec{r},t) = \tilde{\phi}(\vec{r},t)\,e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}$ mit $E = mc^2 + \tilde{E}$ und $\tilde{E} \ll mc^2$) die bekannten Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho_{\rm nr}$ und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j}_{\rm nr}$ des Schrödinger-Feldes resultieren.

2. **Eigenschaften der Dirac-Matrizen:**

   Gegeben sei die Dirac Gleichung $i\hbar\partial_t\psi(\vec{r},t) = \left(c\,\vec{\alpha}\cdot(-i\hbar\vec{\nabla}) + mc^2\beta\right)\psi(\vec{r},t)$ für das Spinorfeld ψ (in einer $(3+1)$-dimensionalen Raumzeit). Jede Spinorkomponente ψ_λ erfüllt die Klein-Fock-Gordon-Gleichung $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi_\lambda(\vec{x},t) = 0$. Entsprechend müssen die 4 Dirac-Matrizen $\{\alpha^i, i=1,2,3\}$ und β den Relationen $\frac{1}{2}\{\alpha^i,\alpha^j\} = \delta^{ij}\,\mathbf{1}$, $\{\alpha^i,\beta\} = \mathbf{0}$ und $\beta^2 = \mathbf{1}$ genügen.

   a) Zeigen Sie, dass die Algebra der Dirac-Matrizen nicht durch Pauli-Matrizen σ^i gelöst werden kann.

   b) Die Konstruktion der Dirac-Matrizen geschieht z.B. mittels direkter Produkte aus den bekannten 2×2-Pauli-Matrizen σ^i und der (2×2)-Einheitsmatrix $\mathbf{1}$.
   Wie lauten die Darstellungen der Dirac-Matrizen: (i) $\beta = \sigma^3\otimes\mathbf{1}$ und $\vec{\alpha} = \sigma^1\otimes\vec{\sigma}$ sowie (ii) $\beta = -\sigma^1\otimes\mathbf{1}$ und $\vec{\alpha} = \sigma^3\otimes\vec{\sigma}$? Verifizieren Sie, dass die konstruierten Darstellungsmatrizen die Dirac-Algebra erfüllen.

   c) Wir betrachten die 4 Diracschen γ-Matrizen (Vierervektor $\gamma^\mu = (\gamma^0 = \beta, \vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha})$ in der Standarddarstellung sowie die Matrix $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho$. Dabei ist $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ das 4-dimensionale Levi-Civita-Symbol ($\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = -\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ und $\varepsilon_{0ijk} = \varepsilon_{ijk}$).
   Verifizieren Sie die Antikommutationsrelationen $\dfrac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}$, $\{\gamma^\mu,\gamma_5\} = 0$ sowie die Eigenschaften $\gamma^{\mu+} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, $\gamma_5^2 = \mathbf{1}$ und $\gamma_5^+ = \gamma_5$.
   Für die Minkowski-Metrik gelte $(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ und
   $\sum_{\lambda=0}^{3} g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$ (Einsteinsche Summenkonvention).

– *bitte wenden* –

d) Wir definieren 6 Matrizen $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Zeigen Sie die Relationen:
$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu}\,\mathbf{1} - i\sigma^{\mu\nu}$ und $[\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0$

e) Zeigen Sie, dass sämtliche (Anti-)Kommutatorrelationen invariant unter unitärer Transformationen U sind, d.h. $\tilde{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^+$ äquivalente Darstellungen der Dirac-Matrizen sind. Was impliziert dieser Sachverhalt für die Dirac-Gleichung?

3. **Kovariante Dirac-Gleichung:**

Die Dirac Gleichung für das Spinorfeld ψ bzw. für das Dirac-adjungierte Spinorfeld $\overline{\psi} = \psi^+\,\gamma^0$ lautet (Vierergradient $\partial_\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla})$) in kovarianter Form

$$i\hbar\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - mc\,\psi(x) = 0\,, \qquad i\hbar\,\partial_\mu\overline{\psi}(x)\,\gamma^\mu + mc\,\overline{\psi}(x) = 0\,,$$

a) Zeigen Sie, dass die Viererstromdichte $j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ des Dirac-Feldes die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ erfüllt.

b) Leiten Sie aus dem Wirkungsprinzip $S[\psi, \overline{\psi}] = \displaystyle\int d^4x\, \big(\overline{\psi}(x)\, i\hbar\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - mc\,\overline{\psi}(x)\psi(x)\big)$ (mit $d^4x = cdtd^3r$) die Dirac-Gleichungen für ψ und $\overline{\psi}$ her.

c) Bestimmen Sie jeweils die Paare kanonisch konjugierter Felder (ψ, π_ψ) bzw. $(\overline{\psi}, \pi_{\overline{\psi}})$, die Hamilton-Dichte und daraus das Hamilton-Funktional.