



4. Übung

1. Streuamplitude und Wirkungsquerschnitte:

Für sphärisch-symmetrische Streupotentiale $V(r)$ lautet die Streuamplitude $f(\theta)$ (θ -Streuwinkel) in 1. Bornscher Näherung:

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^\infty dr' V(r') r' \sin(qr'), \quad q = |\vec{k} - \vec{k}'| = 2k \sin(\theta/2).$$

Berechnen Sie für das Streupotential $V(r) = -V_0 e^{-(r/a)^2}$ den differentiellen und den totalen Wirkungsquerschnitt. Diskutieren Sie die Energieabhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts für die Grenzfälle $ka \ll 1$ und $ka \gg 1$.

2. Coulomb-Formfaktor:

Aus experimentellen Daten zur elastischen Streuung von Elektronen an Atomkernen gewinnt man Informationen über die räumliche Kernladungsdichteverteilung. Dabei spielt die Deduktion sogenannter Formfaktoren $|F(q)|^2$ eine zentrale Rolle. Beispielsweise definiert sich Coulomb-Formfaktor über den Zusammenhang zwischen dem differentiellen Wirkungsquerschnitt eines ausgedehnten Kerns und dem eines punktförmigen Kerns:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Kern}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} |F(q)|^2, \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \frac{Ze^2}{q^2}\right)^2$$

Betrachten Sie als Modell für die Kernladungsdichteverteilung $\rho(r)$ die einer homogen geladenen Kugel (Radius R , Kernladungszahl Z) $\rho(r) = \rho_0 \Theta(R - r)$ mit $\rho_0 = Ze / (\frac{4\pi}{3} R^3)$. Berechnen Sie die dazugehörige Streuamplitude sowie den differentiellen Wirkungsquerschnitt und deduzieren Sie den Formfaktor. Zeigen Sie, dass im Grenzfall $R \rightarrow 0$ der Formfaktor gegen 1 strebt.

3. Zwei-Streuzentrenproblem in 1. Bornscher Näherung:

Im Abstand $\vec{a} = a\vec{e}_z$ parallel zur Einfallsrichtung $\vec{k} = k\vec{e}_z$ seien zwei Streuzentren angeordnet, deren sphärisch-symmetrische Potentiale sich nur im Vorzeichen unterscheiden ($V_1 = -V_2$).

- Wie drückt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ der Anordnung durch den Wirkungsquerschnitt $d\sigma^1/d\Omega$ der einzelnen Streuzentren aus? Geben Sie die Abhängigkeit des dabei eingehenden Koeffizienten vom Streuwinkel an.
- Was resultiert im Grenzfall großer Wellenlängen $\lambda \gg a$ in niedrigster Näherung?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} der Anordnung und dem der Einzelstreuer σ_{tot}^1 unter der Annahme, dass die Abmessungen der Einzelstreuer vernachlässigbar und ihr Abstand a klein gegenüber der Wellenlänge λ ist?