Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2010

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

1. Übung

Zur Erinnerung:
Die Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ sind immer reell. Die Eigenvektoren sind orthogonal. Kommutierende, selbstadjungierte Operatoren sind simultan diagonalisierbar, d.h. sie besitzen einen gemeinsamen Satz von Eigenvektoren. Operatorwertige Funktionen $\hat{f}(\hat{A})$ sind über ihre Taylor-Reihe $\hat{f}(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}^{(n)}(0)\,\hat{A}^n/n!$ definiert.

1. **Translationsoperator in einer Dimension:**

   a) Leiten Sie allein aus der Kenntnis der kanonischen Vertauschungsrelation $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ unter Verwendung der unitären Transformation $\hat{T}(\alpha) = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{x}}$ (mit α reell) das Spektrum (Menge aller Eigenwerte) des selbstadjungierten Operators $\hat{p}$ bezüglich der Zustandsvektoren $|p, \alpha\rangle = \hat{T}(\alpha)|p\rangle$ her. Deuten Sie den Operator $\hat{T}(\alpha)$.

   b) Sei $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ eine Lösung der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung im Ortsraum. Leiten Sie anhand der Taylor-Entwicklung der Wellenfunktion $\psi(x+\alpha)$ um die Stelle x die Ortsdarstellung des Translationsoperators her.

2. **Symmetrietransformationen:**
   Der normierte Zustand $|\psi(t)\rangle$ erfülle die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung $\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle = i\hbar\,\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$. Wir betrachten den ebenfalls normierten Zustand $|\psi_g(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(g)|\psi(t)\rangle$, wobei der Operator $\hat{\mathcal{U}}(g)$ (hier sei g ein beliebiger, reeller Parameter) nicht explizit zeitabhängig ist und die Eigenschaften $\hat{\mathcal{U}}(0) = \mathbf{1}$ sowie $\hat{\mathcal{U}}(g_1)\hat{\mathcal{U}}(g_2) = \hat{\mathcal{U}}(g_1+g_2)$ erfüllt.

   a) Zeigen Sie, daß $\hat{\mathcal{U}}(g)$ allgemein von der Gestalt $\hat{\mathcal{U}}(g) = \exp\{\frac{i}{\hbar}\,g\hat{G}\}$ ist, wobei der nicht explizit zeitabhängige Operator $\hat{G}$ eine Observable repräsentiert.
   Welche Eigenschaften muß $\hat{G}$ erfüllen, damit $\hat{\mathcal{U}}(g)$ eine Symmetrietransformation generiert, d.h. der Erwartungswert $\langle\psi(t)|\hat{G}|\psi(t)\rangle$ eine Erhaltungsgröße ist?

   b) Die Ergebnisse aus Teil (a) der Aufgabe lassen sich unmittelbar verallgemeinern:

   $$g\hat{G} \to \vec{g}\cdot\hat{\vec{G}} = \sum_{\alpha=1}^{3} g_\alpha \hat{G}_\alpha \equiv g_\alpha \hat{G}_\alpha \qquad \text{(Summenkonvention)}$$

   Hierbei deuten wir g_α und $\hat{G}_\alpha$ als die Kartesische Vektorkomponenten. Beispiele möglicher räumlicher Symmetrietransformationen sind

   $$\text{Translationen:} \quad \hat{\vec{G}} \to \hat{\vec{p}} = \hat{p}_\gamma\,\vec{E}_\gamma, \qquad \vec{g} \to \vec{r} \quad \text{(Verschiebungsvektor)}$$

   $$\text{Rotationen:} \quad \hat{\vec{G}} \to \hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\hat{x}_\alpha \hat{p}_\beta\,\vec{E}_\gamma, \qquad \vec{g} \to \vec{\Omega} \quad \text{(Drehvektor)}\,.$$

   Die Generatoren erfüllen die Vertauschungsrelationen $[\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\beta] = 0$ und $[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\beta] = i\hbar\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\hat{L}_\gamma$.

– *bitte wenden* –

Zeigen Sie, daß nicht alle Komponenten des Impules und des Bahndrehimpulses simultan meßbar sind und verifizieren Sie die Identität $\hat{p}_\gamma = \frac{1}{2i\hbar}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,[\hat{p}_\alpha, \hat{L}_\beta]$.

c) Zeigen Sie, daß der Operator der kinetischen Energie $\hat{T}_{\mathrm{kin}} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}$ mit allen Generatoren $\hat{p}_\gamma$ und $\hat{L}_\gamma$ sowie mit dem Gesamtbahndrehimpuls $\hat{\vec{L}}^2$ vertauscht.

d) Der Hamilton-Operator enthalte ein lokales Potential $\hat{V}(\hat{z})$, d.h. für die Ortsdarstellung von $\hat{V}$ gilt: $\langle \vec{r}\,' | \hat{V}(\hat{z}) | \vec{r} \rangle = V(z)\, \langle \vec{r}\,' | \vec{r} \rangle = V(z)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$.
Finden Sie sämtliche Erhaltungsgrößen und somit "gute" Quantenzahlen zur Klassifikation der Eigenwerte und Eigenzustände von $\hat{H}$.

3. **Potentialstufe:**
Untersuchen Sie das Spektrum (Energieeigenwerte, Wellenfunktionen) der stationären Schrödinger-Gleichung (in Ortsdarstellung) bei Anwesenheit einer Potentialstufe $V(z) = V_0\,\Theta(z)$.

a) Diskutieren Sie die Symmetrien des vorliegenden Problems sowie daraus resultierende gute Quantenzahlen zur Klassifikation der Wellenfunktionen und der dazugehörigen Energieeigenwerte.

b) Motivieren Sie aufgrund Ihrer Symmetrieüberlegungen geeignete Lösungsansätze zur Konstruktion der Wellenfunktionen.