Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2010

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

3. Übung

1. **Reihendarstellung von $j_\ell(x)$:**

   Nach Abseparation des Winkelanteils lautet die Radialgleichung der freien Schrödinger-Gleichung

   $$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + 1\right\} z_\ell(x) = 0\,, \qquad x = kr\,.$$

   Bestimmen Sie die am Ursprung ($x = 0$) regulären Lösungen $z_\ell(x)$ mittels eines Potenzreihenansatzes der Form

   $$z_\ell(x) = x^\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,.$$

   a) Wie muß der Exponent μ für eine am Ursprung reguläre Lösungen ($|z_\ell(0)| < \infty$) gewählt werden?

   b) Welche Rekursionsformel ergibt sich für die Koeffizienten a_n?

   c) Wie lautet schließlich die Reihendarstellung für die sphärische Bessel-Funktion $j_\ell(x)$?

2. **Streuamplitude in 1. Bornscher Näherung:**

   Für die elastische Streuung an einem sphärisch-symmetrischen Potential $V(r)$ lautet die Streuamplitude $f(\theta)$ (θ-Streuwinkel) in 1. Bornscher Näherung:

   $$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\,\frac{1}{q}\int_0^\infty dr'\, V(r')\, r' \sin(qr')\,, \qquad q = |\vec{k} - \vec{k}\,'| = 2k\,\sin(\theta/2)\,.$$

   Berechnen Sie die Streuamplitude $f(\theta)$ für ein Streupotential der Form $V(r) = v_0/(r_0^2 + r^2)$.

   (*Hinweis*: Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel bzw. den Residuensatz in der speziellen Form:
   Die Funktion $g(z)$ möge innerhalb des Gebiets, welches von einer Kurve $\mathcal{C}$ umrandet wird, an Stellen z_i Pole 1. Ordung besitzen und sonst aber analytisch sein. Es gilt dann:

   $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} dz\, g(z) = \sum_i \mathrm{Res}[g(z_i)]\,, \qquad \mathrm{Res}[g(z_i)] = \lim_{z\to z_i}(z - z_i)\, g(z)\,, \quad (\text{Residuum von } g \text{ bei } z_i)\,.)$$

– bitte wenden –

3. **Streuamplitude und Wirkungsquerschnitte:**

Berechnen Sie für das Streupotential $V(r) = -V_0\, e^{-(r/a)^2}$ in 1. Bornscher Näherung:

a) den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\dfrac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$

b) den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{el}.

c) Diskutieren Sie die Energieabhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts für die Grenzfälle $ka \ll 1$ und $ka \gg 1$.