4. Übung

1. **Streuung am sphärischen Potentialtopf:**

   Betrachten Sie die Streuung am Potential $V(r) = -V_0\,\Theta(R-r)$ mit $V_0 > 0$.

   a) Lösen Sie das stationäre Schrödinger-Problem $\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2 - \frac{2mV(r)}{\hbar^2}\right\} R_{k\ell}(r) \;=\; 0$ und leiten Sie die Streuphasen $\delta_\ell(k)$ her.

   $$\text{(Lösung :}\quad e^{2i\delta_\ell(k)} \;=\; \frac{j_\ell(\kappa R)h_\ell^{(-)\prime}(kR) - j_\ell'(\kappa R)h_\ell^{(-)}(kR)}{j_\ell(\kappa R)h_\ell^{(+)\prime}(kR) - j_\ell'(\kappa R)h_\ell^{(+)}(kR)}\,,$$

   $$\kappa^2 \;=\; k^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2} \equiv k^2 + \kappa_0^2\,.)$$

   (Hinweise: Überlegen Sie sich zuerst geeignete Lösungsansätze für die Radialfunktionen $R_{k\ell}^{<}(r)$ bzw. $R_{k\ell}^{>}(r)$ in den Bereichen $r < R$ bzw. $r > R$. Formulieren Sie die Anschlußbedingungen bei $r = R$. Bestimmen Sie die Asymptotik der konstruierten Radialfunktionen $R_{k\ell}(r)$.)

   b) Zeigen Sie, dass das Ergebnis aus Teil (a) für s-Wellenstreuung ($\ell = 0$) auf die Beziehung

   $$\tan(kR + \delta_0(k)) = \frac{k}{\kappa}\,\tan(\kappa R)$$

   führt.

   c) Betrachten Sie nun den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot}. Was ergibt sich im Grenzfall $kR \ll 1$ und in welcher Beziehung steht das Ergebnis zur sogenannten Streulänge

   $$a = R\left[1 - \frac{\tan(\kappa_0 R)}{\kappa_0 R}\right]\,?$$

2. **Coulomb-Formfaktor:**

   Aus experimentellen Daten zur elastischen Streuung von Elektronen an Atomkernen gewinnt man Informationen über die räumliche Kernladungsdichteverteilung. Dabei spielt die Deduktion sogenannter Formfaktoren $|F(q)|^2$ eine zentrale Rolle. Beispielsweise definiert sich der Coulomb-Formfaktor über den Zusammenhang zwischen dem differentiellen Wirkungsquerschnitt eines ausgedehnten Kerns und dem eines punktförmigen Kerns:

   $$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Kern}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} |F(q)|^2\,, \qquad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\,\frac{Ze^2}{q^2}\right)^2$$

   Betrachten Sie als Modell für die Kernladungsdichteverteilung $\rho(r)$ die einer homogen geladenen Kugel (Radius R, Kernladungszahl Z) $\rho(r) = \rho_0\,\Theta(R-r)$ mit $\rho_0 = Ze/(\frac{4\pi}{3}R^3)$. Berechnen Sie die dazugehörige Streuamplitude sowie den differentiellen Wirkungsquerschnitt und deduzieren Sie den Formfaktor. Zeigen Sie, dass im Grenzfall $R \to 0$ der Formfaktor gegen 1 strebt.