Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2010

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

5. Übung

1. **Streuung am Atomkern:**

Das Streupotential $V(\vec{r}\,)$ werde durch eine Dichteverteilung $\rho(\vec{r}\,) = A\eta(\vec{r}\,)$ eines Atomkerns aus A Nukleonen erzeugt (Normierung: $\int d^3r\,\eta(\vec{r}\,) = 1$) und sei Lösung der Feldgleichung $(\Delta - \mu^2)\,V(\vec{r}\,) = -4\pi\,\kappa\,\rho(\vec{r}\,)$ (dimensionsbehafteter Faktor κ). Die Streuamplitude lautet wiederum in 1. Bornscher Näherung:

$$f(\vec{q}\,) = -\frac{2M}{4\pi\,\hbar^2}\int\limits_0^\infty d^3r\,V(\vec{r}\,)\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\,, \qquad \vec{q} = \vec{k} - \vec{k}\,' = k(\vec{e}_z - \vec{e}_r)\,.$$

a) Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen der Streuamplitude $f(\vec{q}\,)$, dem Formfaktor $F(\vec{q}\,)$ und der Dichteverteilung $\eta(\vec{r}\,)$ her.
(Hinweis: Verwenden Sie die Identität $(q^2+\mu^2)^{-1}(\Delta - \mu^2)\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = -e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$).

b) Zeigen Sie, dass für $\eta(\vec{r}\,) = \delta(\vec{r}\,) \to F(\vec{q}\,) = 1$.

c) Wie vereinfacht sich der Zusammenhang zwischen Formfaktor und Dichte im Fall kugelsymmetrischer Verteilungen $\eta(r)$?

d) Der mittlere quadratische Radius ist definiert als $\langle r^2\rangle = 4\pi\int\limits_0^\infty dr\,r^4\eta(r)$.

Zeigen Sie den Zusammenhang: $\langle r^2\rangle = -6\left.\dfrac{dF(q^2)}{d(q^2)}\right|_{q^2=0}$.

2. **Eigenfunktionsdarstellung der retardierten Greenschen Funktion:**

Der retardierte Greensche Operator (Propagator) $\widehat{G}^+(t)$ (mit $\widehat{G}^+(t) = 0$ für $t < 0$) zur zeitabhängigen Schrödinger Gleichung ist definiert über

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{H}\right)\widehat{G}^+(t) = \delta(t)\,\mathbf{\widehat{1}}\,. \tag{1}$$

Der zeitunabhängige Hamiltonoperator $\widehat{H}$ besitzt das Spektrum $\widehat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, wobei n abkürzend für einen Satz von Quantenzahlen steht. Im Fall des Hamiltonoperators $\widehat{H}_0 = \widehat{T}$ für ein freies Teilchen steht n für die Impulsquantenzahlen $\vec{k}$, somit $|n\rangle$ für die Impulseigenzustände $|\vec{k}\rangle$ und E_n für die Eigenenergien $E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{2m}\vec{k}^2$. Die Wellenfunktionen $\Phi_n(\vec{r}\,) = \langle\vec{r}\,|n\rangle$ bzw. $\Phi_n^*(\vec{r}\,) = \langle n|\vec{r}\,\rangle$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.

– *bitte wenden* –

a) Zeigen Sie, dass der bezüglich der Zeit t Fourier-transformierte Propagator $\widehat{G}^+(E)$, welcher die Operatorgleichung $\left(E - \widehat{H}\right)\widehat{G}^+(E) = \widehat{\mathbf{1}}$ erfüllt, die (abstrakte) Spektraldarstellung

$$\widehat{G}^+(E) = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{E - E_n + i\epsilon}$$

besitzt, wobei die $i\epsilon$-Vorschrift die Kausalitätsforderung gewährleistet.
Überzeugen Sie sich auch von der Gültigkeit der Integraldarstellung der Θ-Funktion

$$\Theta(t) = \lim_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \,\frac{e^{-i\omega' t}}{\omega' + i\epsilon}\,.$$

b) Zeigen Sie, dass die zeitabhängige, retardierte Greensche Funktion zur Schrödinger Gleichung (1) in Ortsdarstellung durch

$$G^+(\vec{r},\vec{r}\,';t) = \langle\vec{r}\,|\widehat{G}^+(t)|\vec{r}\,'\,\rangle = -\frac{i}{\hbar}\,\Theta(t)\,\sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\,\Phi_n(\vec{r})\Phi_n^*(\vec{r}\,')$$

gegeben ist.

3. **Lippmann-Schwinger Gleichung für die exakte Greensche Funktion:**

Gegeben sei der Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ eines stationären Schrödinger-Streuproblems

$$(E - \hat{H})|\psi_E\rangle = 0 \qquad \text{mit} \quad E > 0\,.$$

Das freie Schrödinger-Problem ist über $(E_{\vec{k}} - \hat{T})|\vec{k}\,\rangle = 0$ mit $E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ definiert. Entsprechend erfüllt der freie Greensche Operator $\widehat{G}_0^+(E)$ die Operatorgleichung

$$\left(E - \widehat{T}\right)\widehat{G}_0^+(E) = \widehat{\mathbf{1}} \quad \text{mit der Spektraldarstellung:} \quad \widehat{G}_0^+(E) = \int d^3k'\,\frac{|\vec{k}\,'\rangle\langle\vec{k}\,'|}{E - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} + i\varepsilon}\,.$$

Leiten Sie in Anlehnung an die Vorlesung zuerst die Lippmann-Schwinger Gleichung für den Zustand $|\Phi_E\rangle$ her und anschließend mittels analoger Schritte die Lippmann-Schwinger Gleichung für den Greenschen Operator $\widehat{G}^+(E)$ des exakten Streuproblems.