Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2010

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

8. Übung

1. **Darstellung der Drehimpulsoperatoren und Pauli-Matrizen:**

   a) *Zur Wiederholung/Erinnerung:*
   Die Drehimpulsoperatoren $\hat{J}_\alpha$ sind selbstadjungiert und erfüllen die Kommutatorrelation $\left[\hat{J}_\alpha, \hat{J}_\beta\right] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{J}_\gamma$ (Summenkonvention). Welche Informationen erhält man über das Spektrum der Operatoren $\hat{\vec{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ und $\hat{J}_z$? Betrachten Sie dazu die Leiteroperatoren $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$. Die Matrixdarstellung $\vec{S}_j$ des Operators $\hat{\vec{J}}$ im $\hat{\vec{J}}^2$-Eigenraum zum Eigenwert $j(j+1)$ (Multiplett) ergibt sich gemäß $\left(\vec{S}_j\right)_{m'm} = \langle jm'|\hat{\vec{J}}|jm\rangle$. Was folgt für die Spur der Matrizen S_j^α?

   b) Die Matrixdarstellung des Operators $\hat{\vec{J}} := \frac{1}{2}\hat{\vec{\sigma}}$ für $j = \frac{1}{2}$ führt auf die Pauli-Spin-Matrizen $\vec{\sigma} = 2\vec{S}_{\frac{1}{2}}$. Geben Sie die Matrixdarstellung von $\hat{\sigma}_\pm$ an. Zeigen Sie ferner die Beziehungen:
   (i) $\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\} = \sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta\sigma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}\,\mathbf{1}$ (Antikommutator),
   (ii) $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})\,(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\mathbf{1} + i\,(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$ für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$. und
   (iii) $e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos(\theta)\,\mathbf{1} + i\sin(\theta)\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$ für reelles θ und einen Einheitsvektor $\vec{n}$.

2. **Dichteoperatoren:**

   Ein beliebiger Zustand $|\psi\rangle$ eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens läßt sich aus den Basiszustände $\{|\frac{1}{2}m\rangle \equiv |m\rangle, m = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ (Spin-$\frac{1}{2}$-Multiplett) konstruieren, da diese ein vollständiges Orthonormalsystem bilden. Sie erfüllen ferner die Beziehungen: $\hat{\sigma}_\pm|m \mp 1\rangle = |m\rangle$ und $\hat{\sigma}_z|m\rangle = m|m\rangle$. Die Einteilchenbasiszustände $|m\rangle$ kann man als eine Realisierung eines Qubits ansehen ($|\frac{1}{2}\rangle \to |0\rangle$ bzw. $|-\frac{1}{2}\rangle \to |1\rangle$).

   a) Bezüglich der Basiszustände des Spin-$\frac{1}{2}$-Multipletts besitzt ein beliebiger Einteilchenoperator $\hat{A}$, der auf die Zustände $|\psi\rangle$ wirkt, die abstrakte Darstellung $\hat{A} = \sum_{m_1 m_2} A_{m_1 m_2}\,|m_1\rangle\langle m_2|$.
   Wie schreiben sich demzufolge die Operatoren $\hat{\sigma}_\pm$ und welche Ausdrücke ergeben sich für $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ und $\hat{\sigma}_z$?

   b) Ein Dichteoperator lautet in der Bloch-Form: $\hat{\varrho} = \dfrac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{1}} + \vec{r}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\right)$. Dabei beschreibt der Vektor $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r(\vartheta, \varphi)$ mit $r \leq 1$ die sogenannte Bloch-Kugel.
   Geben Sie den Dichteoperator bezüglich der Basiszustände des Spin-$\frac{1}{2}$-Multipletts
   $\hat{\varrho}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{m_1 m_2} \varrho_{m_1 m_2}(r, \vartheta, \varphi)\,|m_1\rangle\langle m_2|$ an.
   Wie lautet die Matrix $\varrho_{m'm}(r, \vartheta, \varphi) = \langle m'|\hat{\varrho}(r, \vartheta, \varphi)|m\rangle$?
   Berechnen Sie die Spuren $\mathrm{tr}(\hat{\varrho})$ und $\mathrm{tr}(\hat{\varrho}^2)$.

– *bitte wenden* –

c) Spezifizieren Sie die Dichteoperatoren $\hat{\varrho}(r = 1, \vartheta, \varphi)$ für die Winkel $\vartheta = 0, \vartheta = \pi$ und $\vartheta = \pi/2$.

3. **Verschränkung von Zustandsgemischen:** *Peres-Horodecki-Kriterium*

Der *partiell transponierte* ϱ^{PT} eines Dichteoperators ϱ auf dem Produkthilbertraum $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ bezüglich der Basis $|m\rangle_1 \otimes |\mu\rangle_2$ sei gegeben durch $\varrho^{\mathrm{PT}}_{m\mu\,;\,m'\mu'} = \varrho_{m\mu'\,;\,m'\mu}$.

a) Zeigen Sie, dass der partiell transponierte ϱ^{PT} eines *separablen* Zustands

$$\varrho = \sum_i p_i \left(\varrho_1^{(i)} \otimes \varrho_2^{(i)} \right), \qquad \text{mit } p_i \geq 0, \ \sum_i p_i = 1,$$

positiv ist.

b) Betrachten Sie nun den gemischten Zwei-Qubit-Zustand

$$\varrho_{\mathrm{W}} = (1-p)\frac{1}{4}\mathbf{1} + p\,|\psi^-\rangle\langle\psi^-|, \quad 0 \leq p \leq 1 \ \text{(sogenannter } \textit{Wernerzustand}\text{)},$$

wobei $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$ und $\frac{1}{4}\mathbf{1}$ der vollständig gemischte Zustand ist. Für welche Werte von p ist ϱ_{W} nicht separabel (und demnach verschränkt)?