Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2010

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

11. Übung

1. **Kohärenter Zustand:**

   Gegeben sei ein kohärenter Zustand definiert über $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)\,|0\rangle$ mit dem Verschiebungsoperator $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ (z.B. ein Multiphotonenzustand aus einer Feldmode). Der Vernichter $\hat{a}$ annihiliert den Vakuumzustand $|0\rangle$, d.h. es gilt $\hat{a}|0\rangle = 0$.

   Überprüfen Sie die folgenden Eigenschaften eines kohärenten Zustandes bzw. des Verschiebungsoperators:

   a) $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$,
   b) $\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha) = [\hat{D}(\alpha)]^{-1} \equiv \hat{D}^{-1}(\alpha)$,
   c) $\hat{D}^\dagger(\alpha)\,\hat{a}\,\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$,
   d) $\hat{D}^\dagger(\alpha)\,\hat{a}^\dagger\,\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*$.

2. **Verschobener Oszillator:**

   Gegeben sei der Hamilton-Operator für eine Feldmode (Energie $\hbar\omega$)

$$\hat{H}(\hat{q},\hat{p}) = \frac{1}{2}\,\hat{p}^2 + \frac{\omega^2}{2}\,\hat{q}^2 - \gamma\,\hat{q} = \hat{H}_0(\hat{q},\hat{p}) + \hat{V}(\hat{q}) \tag{1}$$

   mit einem linearen Wechselwirkungsterm $\hat{V}(\hat{q})$ (Kopplungsstärke γ). Der ungestörte Hamilton-Operator $\hat{H}_0(\hat{q},\hat{p})$ läßt sich durch Erzeuger (Vernichter) $\hat{a}^\dagger$ ($\hat{a}$) ausdrücken

$$\hat{H}_0(\hat{q},\hat{p}) = \hat{H}_0(\hat{a},\hat{a}^\dagger) = \hbar\omega\,\frac{1}{2}\,\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \hbar\omega\,\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\,. \tag{2}$$

   $\hat{H}_0(\hat{q},\hat{p})$ kommutiert mit dem Anzahloperator $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ (diagonal). Das Fock-Raumvakuum $|0\rangle$ ist definiert gemäß $\hat{a}|0\rangle = 0$ und $|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ sei ein normierter Fock-Raumzustand.

   a) Wie lautet der Zusammenhang zwischen den kanonischen Operatoren $(\hat{q},\hat{p})$ und den Operatoren $(\hat{a}^\dagger,\hat{a})$, welche $\hat{H}_0(\hat{q},\hat{p})$ im Sinne von Gl. (2) diagonalisieren?
   b) Finden Sie eine Transformation von den kanonischen Operatoren $(\hat{q},\hat{p})$ auf $(\hat{Q},\hat{P})$, sodass gilt:

$$\hat{H}(\hat{q},\hat{p}) = \hat{H}'(\hat{Q},\hat{P}) = \frac{1}{2}\,\hat{P}^2 + \frac{\omega^2}{2}\,\hat{Q}^2 - \frac{\gamma^2}{2\,\omega^2} \equiv \hat{H}_0(\hat{Q},\hat{P}) + \Delta E\,. \tag{3}$$

   Formulieren Sie Erzeuger (Vernichter) $\hat{b}^\dagger$ ($\hat{b}$), welche $\hat{H}_0(\hat{Q},\hat{P})$ im Sinne von Gl. (2) diagonalisieren. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\hat{b}^\dagger$ ($\hat{b}$) und $\hat{a}^\dagger$ ($\hat{a}$)?

– bitte wenden –

c) Zeigen Sie, dass der Vakuumzustand $|\tilde{0}\rangle$, für den $\hat{b}|\tilde{0}\rangle = 0$ gilt, ein kohärenter Zustand, d.h. ein Eigenzustand von $\hat{a}$ ist.

d) Zeigen Sie, dass die Anzahl $(\hat{a}^\dagger \hat{a})$ von Oszillatorquanten im Vakuum $|\tilde{0}\rangle$ gegeben ist durch $\langle\tilde{0}|\hat{a}^\dagger \hat{a}|\tilde{0}\rangle = \dfrac{\gamma^2}{2\,\omega^2} = \dfrac{|\Delta E|}{\hbar\omega}$.

e) Zeigen Sie, dass in dem Vakuumzustand $|\tilde{0}\rangle$ die Fock-Raumzustände $|n\rangle$ Poisson-verteilt vorliegen.

3. **Zustand eines Bosonensystems:**

   Zeigen Sie, dass der Zustand
   $|n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n_1!\, n_2! \cdots n_i! \cdots}} (\hat{b}_1^\dagger)^{n_1}\, (\hat{b}_2^\dagger)^{n_2} \cdots (\hat{b}_i^\dagger)^{n_i} \cdots |0\rangle$
   normiert ist.