



12. Übung

1. Schrödinger-Feld:

Betrachten Sie das komplexe Schrödinger-Feld $\psi(\vec{r}, t)$, wobei in diesem Fall ψ und ψ^* als unabhängige Felder zu verstehen sind.

- a) Formulieren Sie eine Lagrange-Dichte für das klassische Schrödinger-Feld $\mathcal{L}(\psi(\vec{r}, t), \partial_t \psi(\vec{r}, t), \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t); \psi^*(\vec{r}, t), \partial_t \psi^*(\vec{r}, t), \vec{\nabla} \psi^*(\vec{r}, t))$ derart, dass die aus dem Variationsprinzip

$$\delta S[\psi, \psi^*] = \delta \int_{t_a}^{t_b} dt \int_V d^3r \mathcal{L}(\psi(\vec{r}, t), \partial_t \psi(\vec{r}, t), \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t); \psi^*(\vec{r}, t), \partial_t \psi^*(\vec{r}, t), \vec{\nabla} \psi^*(\vec{r}, t)) = 0$$

folgenden Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \psi}{\partial t})} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \psi)} = 0, \quad (\text{eine entsprechende Gleichung gilt für } \psi^*)$$

die Schrödinger-Gleichung $i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, t) \equiv h(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t)$ sowie die entsprechende Gleichung für das komplex-konjugierte Feld ψ^* liefert.

- b) Verifizieren Sie, dass $\pi(\vec{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi(\vec{r}, t) / \partial t)} = i\hbar \psi^*(\vec{r}, t)$ der zu $\psi(\vec{r}, t)$ kanonisch konjugierte Feldimpuls ist.
- c) Formulieren Sie die Hamilton-Dichte $\mathcal{H}(\psi, \pi, \psi^*, \pi^*)$ sowie das Hamilton-Funktional $H[\psi, \pi, \psi^*, \pi^*] = \int d^3r \mathcal{H}(\psi, \pi, \psi^*, \pi^*)$.
- d) Postulieren Sie nun kanonische (Gleichzeit-)Kommutationsrelationen:

$$[\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = i\hbar \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad [\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\psi}(\vec{r}', t)] = 0 = [\hat{\pi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)]$$

und zeigen Sie, dass die Heisenbergsche Bewegungsgleichung $\partial_t \hat{\psi}(\vec{r}, t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\psi}(\vec{r}, t)]$ für den Feldoperator $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$ (im Heisenberg-Bild) auf die Schrödinger-Gleichung für $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$ führt.

- e) Gegeben sei die Entwicklung des Feldoperators nach dem vollständigen, orthonormalen Satz von Einteilchenwellenfunktionen $\phi_\alpha(\vec{r})$ in der Form: $\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \sum_\alpha \hat{c}_\alpha(t) \phi_\alpha(\vec{r})$, wobei

$$h(\vec{r}) \phi_\alpha(\vec{r}) = \varepsilon_\alpha \phi_\alpha(\vec{r}).$$

Zeigen Sie, dass die kanonischen Gleichzeitkommütationsrelationen zwischen ψ und π auf die Kommutationsrelation $[\hat{c}_\alpha, \hat{c}_{\alpha'}^\dagger] = \delta_{\alpha\alpha'}$ etc. führen.

2. Bosonensystem in zweiter Quantisierung:

Betrachten Sie ein System wechselwirkender, massiver Spin-0-Bosonen in einem externen Potential $V(\vec{r})$ und mit einem Zweiteilchenwechselwirkungspotential $U(\vec{r}, \vec{r}')$. Das System wird im Schrödinger-Bild durch die Feldoperatoren $\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})$ beschrieben mit $[\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$. Der (nichtrelativistische) Hamilton-Operator lautet dann

$$\hat{H} = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right) \hat{\psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') U(\vec{r}, \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r})$$

und der Teilchenzahloperator $\hat{N} = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r})$. Wir definieren ferner die Einteilchenzustände $|\phi_1\rangle = \int d^3r \phi_1(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) |0\rangle$ sowie die Zweiteilchenzustände $|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3r d^3r' \phi_2(\vec{r}, \vec{r}') \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') |0\rangle$.

- Zeigen Sie, dass die Teilchenzahl eine Erhaltungsgröße des Systems ist.
- Zeigen Sie ferner: $\hat{N}|\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle$ und $\hat{N}|\phi_2\rangle = 2|\phi_2\rangle$, d.h. die oben definierten Zustände $|\phi_1\rangle$ und $|\phi_2\rangle$ sind tatsächlich Zustände mit fester Teilchenzahl 1 bzw. 2.
- Bestimmen Sie den Erwartungswert der Teilchendichte $\hat{\rho}(\vec{r}) = \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r})$ im Ein- und Zweiteilchenzustand: $\langle \phi_1 | \hat{\rho}(\vec{r}) | \phi_1 \rangle$ und $\langle \phi_2 | \hat{\rho}(\vec{r}) | \phi_2 \rangle$.
- In zweiter Quantisierung ist der Ortsoperator durch $\hat{\vec{r}} = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \vec{r} \hat{\psi}(\vec{r})$ und der Impulsoperator durch $\hat{\vec{p}} = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) (-i\hbar \vec{\nabla}) \hat{\psi}(\vec{r})$ gegeben. Überzeugen Sie sich davon, dass die Erwartungswerte $\langle \phi_1 | \hat{\vec{r}} | \phi_1 \rangle$ und $\langle \phi_1 | \hat{\vec{p}} | \phi_1 \rangle$ mit denen der gewohnten Einteilchenquantenmechanik übereinstimmen.
- Berechnen Sie die Erwartungswerte der Zweiteilchenwechselwirkungsenergie

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') U(\vec{r}, \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r})$$

im Ein- und Zweiteilchenzustand.