Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Quantentheorie II SS 2010

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

13. Übung

1. **Zur Fock-Raumdarstellung fermionischer Zustände:**

Wir betrachten N-Fermionenzustände der Gestalt: $|\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_N\rangle = \prod_{i=1}^{N} \hat{c}^\dagger_{\alpha_i} |0\rangle$, wobei α_i für einen Satz relevanter (Einteilchen-)Quantenzahlen steht (z.B. Impuls $\vec{p}$, Spin s für Elektronen). Für Fermionen gelten die Antikommutationsrelationen: $\{\hat{c}_{\alpha_i}, \hat{c}_{\alpha_j}\} = 0$, $\{\hat{c}^\dagger_{\alpha_i}, \hat{c}^\dagger_{\alpha_j}\} = 0$ und $\{\hat{c}_{\alpha_i}, \hat{c}^\dagger_{\alpha_j}\} = \delta_{\alpha_i,\alpha_j}$.

a) Berechnen Sie Matrixelemente (Skalarprodukte) der Form:
$\langle 0|\alpha_1\rangle$, $\langle \alpha'_1|\alpha_1 , \alpha_2\rangle$ und $\langle \alpha'_1 , \alpha'_2|\alpha_1 , \alpha_2\rangle$, etc.

b) Finden Sie ausgehend von der Vollständigkeitsrelation

$$\mathbf{1} = |0\rangle\langle 0| + \sum_{\alpha_1} |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| + \sum_{\alpha_1,\alpha_2} |\alpha_1 , \alpha_2\rangle\langle\alpha_1 , \alpha_2| + \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} |\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3\rangle\langle\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3| + \cdots$$

Darstellungen für den Erzeuger $\hat{c}^\dagger_\alpha$ und den Vernichter $\hat{c}_\alpha$.

c) Geben Sie für ein Fermionensystem die zu $\hat{c}^\dagger_{\alpha_1}\, \hat{c}_{\alpha_2}\, \hat{c}^\dagger_{\alpha_4}\, \hat{c}^\dagger_{\alpha_6}\, \hat{c}^\dagger_{\alpha_2} |0\rangle$, $\hat{c}^\dagger_{\alpha_1}\, \hat{c}_{\alpha_4}\, \hat{c}_{\alpha_2}\, \hat{c}^\dagger_{\alpha_7}\, \hat{c}^\dagger_{\alpha_4} |0\rangle$ und $\hat{c}^\dagger_{\alpha_3}\, \hat{c}^\dagger_{\alpha_2}\, \hat{c}^\dagger_{\alpha_4}\, \hat{c}^\dagger_{\alpha_6}\, \hat{c}^\dagger_{\alpha_2} |0\rangle$, gehörenden Zustände $|n_{\alpha_1}, n_{\alpha_2}, n_{\alpha_3}, \ldots, n_{\alpha_i}, \ldots\rangle$ an.

d) Zeigen Sie, dass für die Besetzungszahloperatoren gilt: $\hat{n}^2_{\alpha_i} = \hat{n}_{\alpha_i}$. Was impliziert dies für die möglichen Eigenwerte von $\hat{n}_{\alpha_i}$?

e) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{\rho}(\vec{r}\,), \hat{\rho}(\vec{r}\,')]$ zwischen dem Einteilchendichteoperator an verschiedenen Orten. Verwenden Sie dabei $\hat{\rho}(\vec{r}\,) = \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}\,)\hat{\psi}(\vec{r}\,)$ sowie die Darstellung $\hat{\psi}(\vec{r}\,) = \sum_i \hat{c}_{\alpha_i}\, \phi_{\alpha_i}(\vec{r}\,)$.

2. **Nichtrelativistischer Grenzfall der Dirac-Gleichung und Pauli-Gleichung:**

Die Dirac Gleichung für das Bi-Spinorfeld ψ (mit "großer" und "kleiner" Komponente φ und χ) lautet explizit:

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 + eA^0 & c\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}} \\ c\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}} & -mc^2 + eA^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} , \tag{1}$$

wobei $\hat{\vec{\pi}} = c\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}$. Spalten Sie - wie üblich - die Ruhenergie ab, d.h. setzen Sie $\psi(x) = \tilde{\psi}(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$ und leiten Sie unter Verwendung der maßgeblichen Bedingungen $|i\hbar\,\partial_t\tilde{\chi}(x)| \ll |mc^2\,\tilde{\chi}|$ sowie $|eA^0| \ll mc^2$ die Pauli-Gleichung für die große Spinorkomponente $\tilde{\varphi}(x)$ her.

– bitte wenden –

3. **Eigenschaften der Dirac-Matrizen:**

Gegeben sei die Dirac Gleichung $i\hbar\partial_t\psi(\vec{r},t) = \left(c\,\vec{\alpha}\cdot(-i\hbar\vec{\nabla}) + mc^2\beta\right)\psi(\vec{r},t)$ für das Spinorfeld ψ (in einer $(3+1)$-dimensionalen Raumzeit). Jede Spinorkomponente ψ_λ erfüllt die Klein-Fock-Gordon-Gleichung $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi_\lambda(\vec{x},t) = 0$. Entsprechend müssen die 4 Dirac-Matrizen $\{\alpha^i, i = 1,2,3\}$ und β den Relationen $\frac{1}{2}\{\alpha^i,\alpha^j\} = \delta^{ij}\,\mathbf{1}$, $\{\alpha^i,\beta\} = \mathbf{0}$ und $\beta^2 = \mathbf{1}$ genügen.

a) Zeigen Sie, dass die Algebra der Dirac-Matrizen nicht durch Pauli-Matrizen σ^i gelöst werden kann.

b) Die Konstruktion der Dirac-Matrizen geschieht z.B. mittels direkter Produkte aus den bekannten 2×2-Pauli-Matrizen σ^i und der (2×2)-Einheitsmatrix $\mathbf{1}$.
Wie lauten die Darstellungen der Dirac-Matrizen: (i) $\beta = \sigma^3 \otimes \mathbf{1}$ und $\vec{\alpha} = \sigma^1 \otimes \vec{\sigma}$ sowie (ii) $\beta = -\sigma^1 \otimes \mathbf{1}$ und $\vec{\alpha} = \sigma^3 \otimes \vec{\sigma}$? Verifizieren Sie, dass die konstruierten Darstellungsmatrizen die Dirac-Algebra erfüllen.

c) Wir betrachten die 4 Diracschen γ-Matrizen (Vierervektor $\gamma^\mu = (\gamma^0 = \beta, \vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha})$ in der Standarddarstellung.
Verifizieren Sie die Antikommutationsrelationen
$\frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}$.
Für die Minkowski-Metrik gelte die Signatur $(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ und
$\sum_{\lambda=0}^{3} g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$ (Einsteinsche Summenkonvention).

d) Zeigen Sie, dass sämtliche (Anti-)Kommutatorrelationen invariant unter unitärer Transformationen U sind, d.h. $\tilde{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^+$ äquivalente Darstellungen der Dirac-Matrizen sind. Was impliziert dieser Sachverhalt für die Dirac-Gleichung?

4. **Dirac-Gleichung in einer (2+1)-dimensionalen Raumzeit:**

Leiten Sie doch einmal ausgehend von der Klein-Fock-Gordon-Gleichung

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\phi(x,y,t) = 0 \tag{2}$$

die Dirac-Gleichung in einer (2+1)-dimensionalen Raumzeit her.

Aus welchen Matrizen läßt sich die entsprechende Dirac-Algebra aufbauen? Wieviele Komponeten hat demnach ein Dirac-Spinor $\psi(x,y,t)$?