10. Übung

1. **Teleportation mit kontinuierlichen Variablen:**

Wir gehen von unserer Kenntnissen des Protokolls für die Teleportation von Zuständen diskreter Variablen aus (siehe Vorlesung). Zeigen Sie hier, dass auch Zustände kontinuierlicher Freiheitsgrade teleportiert werden können. Dazu betrachten wir die simultanen (Zweiteilchen-)Eigenzustände (des Operators) der Relativkoordinate $Q = q_2 - q_1$ und (des Operators) des Gesamtimpulses $P = p_1 + p_2$ zweier Teilchen A und B,

$$|Q, P\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dq\, e^{iPq}\, |q\rangle_A |q + Q\rangle_B \,, \tag{1}$$

wobei $|q_1\rangle_A \,, |q_2\rangle_A$ die üblichen (Einteilchen-)Ortszustände sind.

a) Zeigen Sie, dass die Operatoren Q und P vertauschen und die Zustände (1) ein vollständiges ON-System bilden, d.h.: ${}_{AB}\langle Q', P'|Q, P\rangle_{AB} = \delta(Q' - Q)\, \delta(P' - P)$ und $\int dQdP\, |Q, P\rangle_{AB\; AB}\langle Q, P| = \mathbf{1}$.

b) Da die Zustände $|Q, P\rangle_{AB}$ eine Basis des Zweiteilchensystems bilden, können wir die Ortseigenzustände (Einteilchenproduktzustände) entwickeln:

$$|q_1\rangle_A |q_2\rangle_B = \int dQdP\, |Q, P\rangle_{AB\; AB}\langle Q, P|(|q_1\rangle_A |q_2\rangle_B) \,. \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten ${}_{AB}\langle Q, P|(|q_1\rangle_A |q_2\rangle_B)$.

c) Alice and Bob haben ihre Teilchen in einem verschränkten Zustand $|Q, P\rangle_{AB}$ präpariert. Alice hat darüber hinaus ein drittes Teilchen A' im unbekannten Zustand $|\psi\rangle_{A'}$ vorliegen, den sie an Bob teleportieren möchte.

Entwerfen Sie ein Protokoll, das die Teleportation erfolgreich durchführt, indem Sie Antworten auf folgende Fragen geben:

- Auf welche Weise soll Alice an ihren Teilchen (A, A') eine Messung durchführen?
- Welche Information wird Bob klassisch übermittelt?
- Was sollte Bob tun, um den ursprünglichen Zustand $|\psi\rangle_B$ bei sich zu rekonstruieren?

(Hinweis: Die unitären Translationsoperatoren $\hat{D}(q) = \int dq'\, |q' + q\rangle\langle q'| \equiv e^{iq\hat{p}}$ und $\hat{D}(p) = \int dp'\, |p' + p\rangle\langle p'| \equiv e^{ip\hat{q}}$ könnten nützlich sein.)

– bitte wenden –

2. **Wigners Version einer Bellschen Ungleichung:**

   Besorgen Sie sich den Artikel *On hidden variables and quantum mechanical probabilities* von Eugen P. Wigner, *American Journal of Physics* **38**, 1005 (1970), lesen Sie ihn und bearbeiten Sie die nachstehenden Aufgaben. (Wigners *domains* seien hier "Elemente der Realität" genannt.)

   a) Im 2. Abschnitt betrachtet Wigner das System zweier Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen und deren simultane Messung bezüglich Kombinationen der drei Raumrichtungen ω_i, $i = 1, 2, 3$. Zeigen Sie, dass es ohne weitere Annahmen 4^9 Elemente der Realität gibt.

   b) Überzeugen Sie sich davon, dass die Bellsche Lokalitätsannahme auf 2^6 Elemente der Realität führt.

   c) Im weiteren Verlauf des Artikels spezialisiert Wigner auf einen Spin-Singulett-Zustand. Beweisen Sie, dass für einen Spin-Singulett-Zustand nur noch 2^3 Elemente der Realität verbleiben.

   d) Vollziehen Sie im Detail die Herleitungen der Bellschen Ungleichung (Gleichung (3) im Artikel) nach, und zeigen Sie deren Verletzung für den Fall dreier koplanarer Richtungen ω_i, $i = 1, 2, 3$.

3. **Erzeuger und Vernichter für Photonen:**

   Wir betrachten eine Mode des quantisierten, freien elektromagnetischen Feldes charakterisiert durch Wellenzahl $\vec{k}$ (Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$), Polarisation σ, und Kreisfrequenz ω_k und bezeichnen mit $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}\sigma} \equiv \hat{a}^\dagger$ bzw. $\hat{a}_{\vec{k}\sigma} \equiv \hat{a}$ den Erzeuger bzw. den Vernichter für ein entsprechendes Photon. Gegeben seien die Operatorfunktionen $\hat{f}(\hat{a}^\dagger)$ und $\hat{f}(\hat{a})$.

   Zeigen Sie, dass gilt:

   a) $[\hat{a}, \hat{f}(\hat{a}^\dagger)] = \dfrac{\partial \hat{f}(\hat{a}^\dagger)}{\partial \hat{a}^\dagger}$,

   b) $[\hat{a}^\dagger, \hat{f}(\hat{a})] = -\dfrac{\partial \hat{f}(\hat{a})}{\partial \hat{a}}$,

   c) $[\hat{a}, e^{\lambda \hat{a}^\dagger}] = \lambda\, e^{\lambda \hat{a}^\dagger}$, $\qquad [\hat{a}^\dagger, e^{\lambda \hat{a}}] = -\lambda\, e^{\lambda \hat{a}}$