Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. W. Strunz PD Dr. G. Plunien	**Quantentheorie II** **SS 2010**	

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

2. Übung

1. **Streuung am eindimensionalen Potentialtopf:**

Gegeben sei die eindimensionale Schrödinger-Gleichung mit einem attraktiven Potential:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x,t)\,, \qquad V(x) = \begin{cases} -V_0 & : \ |x| \leq a \\ 0 & : \ |x| > a \end{cases}\,, \qquad V_0 > 0\,.$$

a) Berechnen Sie für die Streulösungen ($E > 0$) den Transmissions- und Reflektionskoeffizienten T und R und diskutieren Sie deren Energieabhängigkeit.

b) Betrachten Sie den Transmissions- und Reflektionskoeffizienten für den Spezialfall positiver Energien

$$E = -V_0 + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und deuten Sie das Ergebnis (Ramsauer-Townsend Effekt).

2. **Sphärische Bessel-, Neumann- und Hankel-Funktionen:**

Die freie, stationäre Schrödinger-Gleichung für die Gesamtwellenfunktion $\psi_E(\vec{r})$ führt in Kugelkoordinaten nach der Separation des Winkelanteils ($Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$) auf die Radialgleichung

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \varepsilon\right\} R_\ell(r) = 0\,, \quad \varepsilon = \frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

bzw. nach der Substitution $x = kr$ auf die Differentialgleichung:

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} - \ell(\ell+1) + x^2\right\} z_\ell(x) = 0\,. \tag{1}$$

Diese Differentialgleichung ist vom Sturm-Liouvilleschen Typ und besitzt zwei fundamentale, reelle Lösungsfunktionensysteme:

Sphärische Bessel-Funktionen	$z_\ell^{\mathrm{reg}}(x) = j_\ell(x)$	(regulär bei $x = 0$)
Sphärische Neumann-Funktionen	$z_\ell^{\mathrm{irr}}(x) = n_\ell(x)$	(irregulär bei $x = 0$)

Alternativ lassen sich komplexwertige Lösungssysteme, die sphärischen Hankel-Funktionen $h_\ell^{(\pm)}(x) = \pm i j_\ell(x) + n_\ell(x)$, als unabhängige Linearkombinationen finden.
(Bemerkung: In der Literatur ist die Definition $h_\ell^{(1/2)} = \mp i h_\ell^{(\pm)} = j_\ell \pm i\,(-n_l)$ zusammen mit $n_\ell \to -n_\ell$ weit verbreitet.)

– *bitte wenden* –

a) Zeigen Sie für $\ell = 0$ durch direktes Lösen der DGL (1), dass gilt: $j_0(x) = \sin(x)/x$ und $n_0(x) = \cos(x)/x$.

b) Leiten Sie die Rayleighschen Formeln aus der Differentialgleichung (1) her (Faktor $(-1)^\ell$ Konvention):

$$j_\ell(x) = (-1)^\ell \, x^\ell \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\ell \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) , \qquad n_\ell(x) = (-1)^\ell \, x^\ell \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\ell \left(\frac{\cos(x)}{x}\right) .$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $z_\ell(x) = (-1)^\ell \, x^\ell y_\ell(x)$ und zeigen dann zunächst den Zusammenhang: $y'_\ell(x) = x y_{\ell+1}(x)$)

c) Überzeugen Sie sich von der Gültigkeit des asymptotischen Verhaltens (für $x \to \infty$):

$$j_\ell(x) \sim \frac{1}{x} \sin(x - \frac{\ell\pi}{2}) , \qquad n_\ell(x) \sim \frac{1}{x} \cos(x - \frac{\ell\pi}{2}) .$$

d) Zeigen Sie, dass die jeweiligen Wronski-Determinanten gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} W(j_\ell, n_\ell) &= j_\ell(x) n'_\ell(x) - j'_\ell(x) n_\ell(x) = -\frac{1}{x^2} , \qquad \left(j'_\ell(x) = \frac{dj_\ell(x)}{dx} \right) \\ W(h_\ell^{(+)}, h_\ell^{(-)}) &= h_\ell^{(+)}(x) h_\ell^{(-)\prime}(x) - h_\ell^{(+)\prime}(x) h_\ell^{(-)}(x) = -\frac{2i}{x^2} . \end{aligned}$$

e) Zeigen Sie, dass für die sphärischen Bessel-Funktionen $j_{\ell'}(x)$ und $j_\ell(x)$ gilt:

$$\int_0^\infty dx \, j_{\ell'}(x) j_\ell(x) = \frac{\sin[(\ell - \ell')\,\pi/2]}{\ell(\ell+1) - \ell'(\ell'+1)} .$$