

Theoretische Mechanik SS 2013

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
<http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre>

12. Übung

1. Kanonische Transformationen:

Die Transformationsgleichungen zwischen zwei Koordinatensystemen im Phasenraum seien

$$P(q, p) = 2\sqrt{q}(1 + \sqrt{q} \cos p), \quad Q(q, p) = \ln(1 + \sqrt{q} \cos p).$$

- Geben Sie die Umkehrtransformation $q(Q, P), p(Q, P)$ an.
- Zeigen Sie, dass die Transformation kanonisch ist, indem Sie die Poissonklammer $\{q, p\}_{QP}$ berechnen.
- Überzeugen Sie sich davon, dass auch $\{Q, P\}_{qp} = 1$ gilt.
- Zeigen Sie, dass die Transformation von $F_3(p, Q) = -(1 - e^Q)^2 \tan p$ erzeugt wird.

2. Hamilton-Jacobi-Theorie:

Behandeln Sie die Bewegung eines Massenpunktes m im eindimensionalen Potential

$$V(q) = V_0 \tan^2(kq), \quad |q| < \frac{\pi}{2k} \quad \text{mit Konstanten } V_0, k > 0.$$

- Stellen Sie die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung auf, und drücken Sie die verkürzte Wirkung $S_0(q)$ als Integral aus.
- Bestimmen Sie $q(t)$ nach der Hamilton-Jacobi-Methode. Beim Ableiten von S_0 entsteht ein Integral, das Sie durch die Substitution $u = \sin(kq)$ lösen können.

3. Wirkungs- und Winkelvariablen:

Betrachten Sie weiterhin das Potential aus Aufgabe 2.

- Bestimmen Sie die Wirkungsvariable I . Dabei ist das Integral nützlich:

$$\int_0^{\frac{1}{C} \arctan \frac{A}{B}} dx \sqrt{A^2 + B^2 \tan^2(Cx)} = \frac{\pi}{2C} \left(\sqrt{A^2 + B^2} - \sqrt{B^2} \right).$$

- Drücken Sie die Hamilton-Funktion durch I aus, und ermitteln Sie die Kreisfrequenz der periodischen Bewegung.
- Berechnen Sie die zu I kanonisch konjugierte Winkelvariable θ als Funktion von q .
- Zeigen Sie, dass die hier erlangten Resultate auf das gleiche Ergebnis $q(t)$ führen, wie im Teil b) der Aufgabe 2.

4.* Symplektische Gruppe und kanonische Transformationen:

Sei $G = \{M_1, M_2, M_3, \dots\}$ die Mengen aller symplektischen Matrizen für die gilt:
 $M_a^T J M_a = J$ mit $J^{-1} = J^T = -J$ und $J^{-1} J = J^T J = -J J = \mathbf{1}$.

Zeigen Sie, dass die Matrizen $M_a \in G$ eine Gruppe bilden, indem Sie die Gültigkeit der Gruppenaxiome überprüfen (Gruppenverknüpfung entspricht der Matrixmultiplikation):

- (i) Für alle $M_a, M_b \in G$ gilt: $M_a M_b \in G$.
- (ii) Für alle $M_a, M_b, M_c \in G$ gilt: $(M_a M_b) M_c = M_a (M_b M_c) \in G$.
- (iii) Es existiert ein Einselement $E \in G$, sodass für jedes $M_a \in G$ gilt: $E M_a = M_a E = M_a$.
- (iv) Zu jedem $M_a \in G$ existiert ein Inverses $M_a^{-1} \in G$, sodass gilt: $M_a M_a^{-1} = M_a^{-1} M_a = E$.

(Hinweis: Zeigen Sie das $M_a^{-1} = J^T M_a^T J$ und überprüfen Sie, das gilt: $J \in G, J^T \in G$ und $M_a^T \in G$.)

Zusammenhang mit kanonischen Transformationen:

Führt man die symplektische Notation für die $2f$ Phasenraumvariablen $(x_\alpha) = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ zusammen mit der $2f \times 2f$ -dimensionalen Matrix $(J_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$ ein, so formuliert sich die Poisson-Klammer für beliebige Funktionen f und g der kanonischen Variablen gemäß:

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2f} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial x_\beta}.$$

Eine kanonische Transformation $\mathcal{K}_a : \mathbf{x} \xrightarrow{\mathcal{K}_a} \mathbf{y}$ vermittelt den Übergang von $(x_\alpha) = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ auf neue Phasenraumvariablen $(y_\alpha) = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$, welcher durch die (invertierbaren) Transformationsmatrizen $(M_a)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} \right)$ vermittelt wird. Die Matrizen $(M_a)_{\alpha\beta}$ erfüllen offensichtlich die Bedingung $M_a^T J M_a = J$.

Die kanonischen Transformationen $\mathcal{K}_a : \mathbf{x} \xrightarrow{\mathcal{K}_a} \mathbf{y}$ zusammen mit dem Hintereinanderschalten $\mathcal{K}_a \mathcal{K}_b : \mathbf{x} \xrightarrow{\mathcal{K}_a} \mathbf{y} \xrightarrow{\mathcal{K}_b} \mathbf{z}$ als Gruppenverknüpfung bilden somit eine Gruppe. Die Transformationsmatrizen $(M_a)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} \right)$ sind eine Realisierung (Darstellung) der Gruppe.