

Theoretische Mechanik SS 2013

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
<http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre>

3. Übung

1. Raketengleichung:

Eine Rakete befinde sich in der Startphase und bewege sich im (als konstant angenommenen) Schwerfeld der Erde senkrecht nach oben. Es seien:

$m(t)$	die momentane Masse der Rakete,
M, m_0^{TS}	die Masse der Rakete, Treibstoffmasse vor dem Start
$\mu(t) = -\frac{dm(t)}{dt} > 0$	Massenabnahme der Rakete pro Zeit,
$v(t)$	die momentane Geschwindigkeit der Rakete,
$v_G(t)$	der Betrag der Austrittsgeschwindigkeit der Verbrennungsgase,
$\rho_G(t)$	die Dichte der austretenden Verbrennungsgase,
A	der Düsenquerschnitt.

- a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für die Rakete her. (Betrachten Sie hierfür die Änderung des Gesamtimpulses.)
Welcher Zusammenhang besteht zwischen ρ_G und v_G ?
- b) Finden Sie $v(t)$ unter der Annahme, dass v_G und μ konstant sind ($v(0) = 0$).
Unter welcher Bedingung erhebt sich die Rakete, d.h. ist $v(t) > 0$ in der Startphase?

2. Stoß zweier Teilchen:

- a) Beim Stoß zweier Teilchen werde die Energie Q in andere Energieformen verwandelt. Man formuliere Impuls- und Energiebilanz sowohl im Schwerpunkt- (Σ_S) als auch im Laborsystem (Σ_L).
- b) Welche Aussagen lassen sich über den Zusammenhang zwischen den Impulsen vor und nach dem Stoß in den beiden Bezugssystemen machen? Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass ein Teilchen vor dem Stoß ruht.
- c) Welcher Teil der kinetischen Anfangsenergie kann bei einem inelastischen Stoß höchstens in andere Energieformen verwandelt werden? Wie sieht die Bewegung beider Teilchen nach dem Stoß dann aus?

3. Zweikörperproblem im Schwerfeld der Erde:

Betrachten Sie ein System von zwei Massen m_1, m_2 verbunden durch eine masselose Stange der Länge l . Diese Hantel, die sich im Schwerfeld der Erde befinden möge, wird nun vom Koordinatenursprung in beliebige Richtung weggeworfen.

- a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Massenmittelpunkt auf und lösen diese für eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$.
- b) Zerlegen Sie den Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ in einen Relativ- und einen Schwerpunktanteil $\vec{L}_r$ und $\vec{L}_s$ und berechnen Sie letzteren.

– bitte wenden –

- c) Wie lautet die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung? Was können Sie über den Relativdrehimpuls $\vec{L}_r$ aussagen?
- d) Zeigen Sie, dass die Massen m_1 und m_2 Kreisbahnen um den Massenmittelpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit beschreiben. Wie verhalten sich deren Radien?

4. Anharmonischer Oszillator:

Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunkts in einer Raumdimension unter dem Einfluss eines anharmonischen Potentials $V(x) = \frac{k}{2}x^2 + \alpha x^4$. Zur Zeit $t_0 = 0$ befinde sich der Massenpunkt bei $x_0 = x(0)$ im Ruhezustand.

- a) Der Massenpunkt führt anharmonische Schwingungen aus. Wie lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung und welche Erhaltungssätze gelten für das eindimensionale Bewegungsproblem?
- b) Überlegen Sie sich, dass für eine vorgegebene Energie E der Massenpunkt zwischen zwei Umkehrpunkten $x_<$ und $x_>$ oszilliert. Durch welche Bedingung bestimmen sich die Umkehrpunkte?

Leiten Sie nun die Lösung der Differentialgleichung in Form einer Integraldarstellung für die Umkehrfunktion $t = t(x)$ für die gegebenen Anfangsbedingungen her. Welcher Ausdruck ergibt sich somit für die Schwingungsdauer T als Funktion der Energie E ?

- c) Verifizieren Sie den Ausdruck für die Schwingungsdauer T für den leicht anharmonischen Fall ($\alpha E \ll k^2$): $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \left(1 - \frac{3\alpha E}{k^2} \right)$. (Hinweis: Verwenden Sie für die näherungsweise Auswertung des Integrals aus Teil b) die Substitution $V(x)/E = \sin^2(\varphi)$.)