

Theoretische Mechanik SS 2013

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
<http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre>

7. Übung

1. Sturz ins Zentrum:

Ein Massenpunkt (Masse m , Energie E , Drehimpuls L) bewegt sich in der Ebene $z = 0$ unter dem Einfluß des attraktiven Zentralpotentials $V(r) = -\alpha r^{-2}$ auf das Zentrum ($r = 0$) zu. Anfänglich befinde sich der Massenpunkt in einer radialen Entfernung r_0 .

- Stellen Sie den Energiesatz auf und leiten Sie nochmals die Bahngleichung in der Form $\varphi = \varphi(r)$ her.
- Unter welchen Bedingungen (für α und L) kann der Massenpunkt das Zentrum auch mit Drehimpuls $L > 0$ erreichen? Benötigt er dafür eine endliche oder unendliche Zahl von Umläufen?
- Zeigen Sie, dass die für den Sturz ins Zentrum benötigte Zeit stets endlich bleibt, jedoch die Bahngeschwindigkeit sowie die Winkelgeschwindigkeit des Massenpunktes divergieren.

2. Objekt auf rotierender Gerade:

Ein Objekt mit der Masse m kann sich reibungsfrei entlang einer Geraden bewegen, die durch die Gleichungen $z - \tan \omega t x = 0$ und $y = 0$ festgelegt ist. Die Gerade rotiert uniform mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (0, \omega, 0)^T$ um die y -Achse.

Berechnen Sie die Bewegung des Objekts unter dem Einfluß der Schwerkraft $\vec{F}_g = (0, 0, -mg)^T$ für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (r_0, 0, 0)^T$ und $\vec{v}(0) = (0, 0, r_0\omega)^T$.

(Mögliche Lösungsstrategien: Statt Kartesischer Koordinaten wähle ebene Polarkoordinaten in der x - z -Ebene oder transformiere ins rotierende System.)

3. Zwangsbedingungen und Zwangskräfte:

- Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei entlang einer Kurve $z = f(x)$ unter dem Einfluß der Schwerkraft $\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$. Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf und bestimmen Sie die Zwangskraft.
- Ein Massenpunkt liegt im Schwerfeld auf dem obersten Punkt einer Kugel und beginnt von dort reibungsfrei herunter zu gleiten. Berechnen Sie die Zwangskraft. An welcher Stelle hebt der Massenpunkt von der Kugel ab?
(Hinweis: Betrachten Sie die Bewegung in der x - z -Ebene und verwenden Sie den Energiesatz; beziehen Sie dabei die potentielle Energie auf den obersten Punkt.)

4. Harmonischer Oszillator auf schiefer Ebene:

Ein harmonischer Oszillator (Masse m , Federkonstante k) hängt auf einer schiefen Ebene $z - \tan \alpha x = 0$. Die Feder ist so aufgehängt, dass die Masse unter dem Einfluß der Schwerkraft und der Rückstellkraft die Gleichgewichtsposition $x_G = \frac{g}{\omega^2} \sin \alpha \cos \alpha$, $z_G = \frac{g}{\omega^2} \sin^2 \alpha$ einnimmt. Welche Bewegung führt der Oszillator unter Vernachlässigung der Reibung aus, wenn er bei der Anfangsposition $x(0) = x_G$, $z(0) = z_G$ die Anfangsgeschwindigkeit $v_x(0) = v_0 \cos \alpha$, $v_z(0) = v_0 \sin \alpha$ besitzt?

(Hinweis: Verwenden Sie geeignete generalisierte Koordinaten.)