Theoretische Mechanik SS 2013

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

8. Übung

1. **Kugelpendel:**

   Ein Massenpunkt bewegt sich im homogenen Schwerefeld $\vec{F} = -mg\,\vec{e}_z$ in einer kugelförmigen Schale. Wählen Sie günstige generalisierte Koordinaten für das Problem und stellen Sie die Langrange-Funktion und die Euler-Lagrange-Gleichungen auf. Welche Erhaltungsgrößen gibt es?

2. **Zykloidenpendel:**

   Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichungen für ein Zykloidenpendel mit Pendellänge $4a$. Die Parameterdarstellung der Bahn sei durch $x = a\,(\theta + \sin\theta)$ und $z = -a\,(3 + \cos\theta)$ gegeben. Zeigen Sie, dass das Zykloidenpendel isochron schwingt.
   (Hinweis: Verwenden Sie hierfür $q = \sin\frac{\theta}{2}$ als generalisierte Koordinate.)

3. **Massenpunkt auf einer Zylinderoberfläche:**

   Ein Massenpunkt m bewegt sich auf der Mantelfläche eines Zylinders (Radius R, z-Achse = Symmetrieachse) unter der gemeinsamen Einwirkung einer harmonischen Rückstellkraft und der Schwerkraft, so dass $\vec{F} = -k\vec{r} - mg\,\vec{e}_z$.

   a) Überlegen Sie sich geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrange-Funktion auf.
   b) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen her.
   c) Gibt es zyklische Koordinaten und - falls ja - welchen Erhaltungsgrößen entsprechen die dazugehörigen kanonischen Impulse?
   d) Bestimmen Sie die Bewegung des Massenpunkts für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (R, 0, 0)$ und $\dot{\vec{r}}(0) = (0, v_0, v_0)$

4. **Brachistochrone-Problem**

   In der (x,z)-Ebene seien die zwei Punkte $A = (0, a)$ und $B = (b, 0)$ vorgegeben. Gesucht ist die Kurve $z = z(x)$, auf der ein anfänglich in A ruhender, reibungsfrei gleitender Massenpunkt im Schwerefeld $\vec{F}_g = -mg\,\vec{e}_z$ am schnellsten nach B kommt.

– bitte wenden –

a) Formulieren Sie das Variationsprinzip für die Gleitzeit $T[z] = \int\limits_0^T dt = \int\limits_A^B \frac{ds}{v}$,

wobei $v = \frac{ds}{dt}$ die Bahngeschwindigkeit des Massenpunktes und $ds = |d\vec{r}| = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ das Längenelement der Bahnkurve bezeichnet.

b) Zeigen Sie, dass die zu diesem Variationsproblem gehörige Euler-Lagrange Gleichung für die Kurve $z = z(x)$ auf $(a - z)(1 + z'^2) = const.$ führt und durch eine Zykloide mit der Parameterdarstellung $x(\theta) = \beta\,(\theta - \sin\theta)$ und $z(\theta) = \alpha - \beta\,(1 - \cos\theta)$ erfüllt wird. Bestimmen Sie die Integrationskonstanten α, β so, dass Anfangs- und Endpunkt $(0, a)$ und $(b, 0)$ auf der Bahn liegen.

c) Skizzieren Sie die Bahn für die drei Fälle $2b < \pi a$, $2b = \pi a$ und $2b > \pi a$ und berechnen Sie die Gleitzeit T für den Fall $2b = \pi a$.