

Theoretische Mechanik SS 2013

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
<http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre>

2. Übung

1. Das begleitende Dreibein:

Ein Massenpunkt bewege sich entlang einer Raumkurve (Trajektorie) $\vec{r}(t)$. Das Bogenlängenelement ds entlang der Raumkurve ist gegeben durch $ds = |d\vec{r}(t)| = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| dt = v(t) dt$. Die Bogenlänge s entlang der Raumkurve ist ebenso wie die Zeit t ein geeigneter Parameter, wenn $s = s(t)$ bzw. $t = t(s)$ eindeutige Funktionen sind.

a) Zeigen Sie, dass per definitionem der Tangentenvektor $\vec{e}_T = \frac{d\vec{r}}{ds}$, der Normalenvektor $\vec{e}_N = \frac{d\vec{e}_T}{ds} / \left| \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right|$ und der Binormalenvektor $\vec{e}_B = \vec{e}_T \times \vec{e}_N$ ein (lokales) orthogonales und normiertes Dreibein bilden.

b) Zeigen Sie, dass die momentane Beschleunigung $\vec{a}$ die Komponentenzerlegung besitzt:

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_T + \frac{v^2}{R} \vec{e}_N, \quad \vec{e}_N = R \frac{d\vec{e}_T}{ds},$$

wobei v der Betrag der momentanen Geschwindigkeit und R der momentane Krümmungsradius der Bahnkurve ist (Radius des Kreisbogens, durch den die Bahnkurve im Zeitintervall $[t, t + dt]$ approximiert werden kann).

2. Teilchen auf einer Schraubenlinie:

Ein Teilchen bewege sich auf einer Trajektorie gegeben durch

$$\vec{r}(t) = r \cos(\omega t) \vec{E}_x + r \sin(\omega t) \vec{E}_y + h \omega t \vec{E}_z.$$

Dabei sind r, ω und h vorgegebene Konstanten. Berechnen Sie für diese Bewegung

- die Bogenlänge $s(t)$,
- die Dreibeinvektoren $\{\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_B\}$ und den momentanen Krümmungsradius der Bahnkurve,
- die Komponenten der Kraft, die notwendig ist um das Teilchen auf eine Schraubenlinie zu zwingen.

– bitte wenden –

3. Eigenschaften der Galilei-Raumzeit:

In einer 2-dimensionalen Galileischen Raumzeit ist ein (Welt-)Ereignis A bezüglich eines Inertialsystems Σ durch die Angabe seiner Zeit- und Ortskoordinaten (t_A, x_A) charakterisiert. Die t -Achse von Σ wird durch die Menge aller Ereignisse $(t, x = 0)$ eines im Koordinatenursprung ruhenden Beobachters repräsentiert. Entsprechend wird die x -Achse $(t = 0, x)$ durch die Menge aller bezüglich Σ zur Zeit $t = 0$ gleichzeitigen Ereignisse repräsentiert.

- a) Wie lassen sich die t' - und die x' -Achse eines Inertialsystems Σ' beschreiben, welches sich gegenüber Σ mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit v bewegt (Galilei-Transformation)?
- b) Zeigen Sie, dass in der Galilei-Raumzeit der Gleichzeitigkeit zweier Weltereignisse A, B eine absolute Bedeutung zukommt und folglich ihr räumlicher Abstand $\Delta x = x_B - x_A$ eine Galilei-Invariante ist.
- c) Bezüglich des Inertialsystems Σ mögen zwei nicht-gleichzeitig stattfindende Ereignisse A und B einen räumlichen Abstand $\Delta x = x_B - x_A > 0$ besitzen. Zeigen Sie, dass immer ein Inertialsystem Σ' existiert, bezüglich dem der räumliche Abstand $\Delta x' = x'_B - x'_A$ verschwindet (uneingeschränkte Relativität der "Gleichortigkeit").

4. Vektoranalysis I:

Verwenden Sie die Darstellung des Vektorprodukts mittels des Levi-Civita Symbols

$(\vec{a} \times \vec{b}) = \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{E}_k$ und verifizieren Sie die folgenden Identitäten:

- a) $\nabla \times \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = 0; \quad \nabla \cdot \left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \right) = \frac{2}{|\vec{x}|}.$
- b) Ist das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x}) = \lambda \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^n}$ konservativ? Bestimmen Sie gegebenenfalls das dazugehörige skalare Potential $\Phi(\vec{x})$ mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$.
- c) Ein geladenes Teilchen (Ladung q , Masse m) bewege sich in einem konstanten elektrischen und magnetischen Feld $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$. Durch die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q(\vec{E}_0 + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0)$ wird das Teilchen sowohl abgelenkt als auch beschleunigt.

Berechnen Sie das Arbeitsintegral $A = \int_{P_1}^{P_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}_L$ entlang der Trajektorie $\vec{r}(t)$ des Teilchens.