Theoretische Mechanik SS 2013

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

9. Übung

1. **Teilchen auf Schraubenlinie im homogenen Schwerefeld:**

   Ein Teilchen bewegt sich unter dem Einfluß der Schwerkraft $\vec{F} = -mg\,\vec{e}_z$ entlang einer Schraubenlinie mit Ganghöhe h auf der Zylindermantelfläche $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Wählen Sie Zylinderkoordinaten zur Beschreibung des Bewegungsproblems.

   a) Wie lauten die Zwangsbedingungen in diesen Koordinaten?

   b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen her.

   c) Geben Sie die allgemeinen Lösungen für $\phi(t)$ und $z(t)$ an.

   d) Berechnen Sie die kanonischen Impulse und diskutieren Sie Erhaltungsgrößen.

2. **Molekülschwingungen und Normalkoordinaten:**

   Die Atome (Massen $m - M - m$) eines linearen Moleküls können Schwingungen längs der Molekülachse ausführen (eindimensionales Problem). Nehmen Sie dabei an, dass das atomare Wechselwirkungspotential in harmonischer Näherung durch Federn mit gleicher Federkonstanten k modelliert werden kann.
   Betrachten Sie kleine Auslenkungen η_i der Atome aus ihren Ruhelagen und stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen des Moleküls.

3. **Auffinden allgemeiner Erhaltungsgrößen:**

   Das zu der Lagrange-Funktion $L\left(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t), t\right)$ gehörige Wirkungsfunktional

$$S[\underline{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) \quad \text{mit} \quad \underline{q}(t) = \{q_k(t), k = 1, \ldots, f\}\,, \quad \underline{\dot{q}}(t) = \{\dot{q}_k(t), k = 1, \ldots, f\}$$

   soll auf Invarianzen unter Transformationen der generalisierten Koordinaten $\underline{q}$ und des Zeitparameters t der Gestalt

$$\begin{aligned} \underline{q}(t) \quad &\rightarrow \quad \underline{\tilde{q}}(\tilde{t}\,) = \underline{q}(t) + \varepsilon\,\underline{\chi}\left(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t), t\right) \equiv \underline{q} + \varepsilon\,\underline{\chi}\,, \\ t \quad &\rightarrow \quad \tilde{t} = t + \varepsilon\,\underline{\tau}\left(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t), t\right) \equiv t + \varepsilon\,\underline{\tau}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

   hin untersucht werden. Hierbei soll $0 \leq \varepsilon \ll 1$ gelten, sodass für $\varepsilon = 0$ die identische Transformation resultiert. Unter den Transformationen (1) soll die Lagrange- Funktion $L(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t), t)$ nach $L\left(\underline{\tilde{q}}(\tilde{t}\,), \underline{\tilde{q}}'(\tilde{t}\,), \tilde{t}\right)$ übergehen ($\underline{\tilde{q}}' = d\underline{\tilde{q}}/d\tilde{t}$).

– bitte wenden –

a) Zeigen Sie zunächst die Identitäten:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{t}}{dt} &= 1+\varepsilon\,\frac{d\tau}{dt}\,,\\ \frac{dt}{d\tilde{t}} &= 1-\varepsilon\,\frac{d\tau}{dt}+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\,,\\ \frac{d\tilde{q}_k}{d\tilde{t}} &= \frac{dq_k}{dt}+\varepsilon\,\frac{d\chi_k}{dt}-\varepsilon\,\frac{dq_k}{dt}\,\frac{d\tau}{dt}+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\,.\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass die Invarianzbedingung $S[\underline{\tilde{q}}]=S[\underline{q}]$ auf

$$\left\{\frac{d}{d\varepsilon}\left[\left(\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)\,L(\underline{\tilde{q}},\underline{\tilde{q}}',\tilde{t}\,)\right]\right\}_{|\varepsilon=0}=0=\frac{d}{dt}\left\{\sum_k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\,\chi_k+\left(L-\sum_k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\,\dot{q}_k\right)\,\tau\right\}=\frac{d}{dt}\,F(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$$

führt, d.h. die Größe $F=F\left(\underline{q},\underline{\dot{q}},t\right)$ eine Erhaltungsgröße ist.

c) Verifizieren Sie die Identität (Euler-Theorem) $\sum\limits_k\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\,\dot{q}_k=2T$ für die kinetische Energie $T=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{ij}a_{ij}(\underline{q})\,\dot{q}_i\dot{q}_j$. Zeigen Sie, dass für konservative Systeme mit $L=L(\underline{q},\underline{\dot{q}})$ die Energie durch $E=\sum\limits_k\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\,\dot{q}_k-L$ gegeben ist.