Institut für
Theoretische Physik
Prof. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Elektrodynamik WS 2008/09

1. Übung

1. **Erinnerung an die Lagrangesche und Hamiltonsche Dynamik:**
Zwei Punktteilchen gleicher Masse m und Ladung q bewegen sich eingeschränkt auf einem Kreisring mit Radius R unter dem Einfluß der Coulomb-Wechselwirkung $V_\mathrm{C}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = k\frac{q^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ (hierbei ist k eine vom Einheitensystem abhängige Konstante).

   a) Wieviele Freiheitsgrade gibt es? Formulieren Sie die Lagrange-Funktion für das Problem in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) und leiten Sie die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen für die beiden Teilchen her.

   b) Verifizieren Sie, dass der Betrag der Vektoren des Relativabstands $\vec{r}$ und des Schwerpunkts $\vec{r}_s$ durch $r = 2R\sin(\alpha)$ und $r_s = R\cos(\alpha)$ gegeben sind, wobei $\alpha = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$. Transformieren Sie die Lagrange-Funktion von Polarwinkel φ_1, φ_2 auf die Winkelkoordinaten $\alpha = (\varphi_1 - \varphi_2)/2, \beta = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$. Wie lauten die (entkoppelten) Bewegungsgleichungen? Deuten Sie die β-Bewegung.

   c) Die potentielle Energie des Systems besitzt für $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ ein stabiles Minimum (wieso?). Zeigen Sie, dass bei kleinen Auslenkungen um diese stabile Konfiguration der Relativwinkel α der beiden Teilchen mit einer Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{kq^2}{4mR^3}}$ um den Wert $\frac{\pi}{2}$ oszilliert; (Hinweis: Entwicklung der BWGl um $\alpha = \pi/2$)

   d) Stellen Sie die Hamilton-Funktion auf und leiten Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her.

2. **Elektrische Ladung und Strom:**
Die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$ beschreibt die Ladungserhaltung in der lokalen Form. Formulieren Sie unter der Annahme homogener Ladungs- und Stromdichte ρ und $\vec{j}$ mittels des Gaußschen Satzes die Ladungserhaltung für ein stromdurchflossenes (zylindrisches) Leiterelement .

3. **Differentialoperatoren:**

   a) Gegeben seien die beliebigen Skalarfelder Φ, Ψ und Vektorfelder $\vec{A}, \vec{B}$. Formen Sie unter Beachtung der Leibniz-Produktregel folgende Ausdrücke um:
   $$\vec{\nabla}(\Phi\Psi)\,, \qquad \vec{\nabla} \cdot (\Phi\vec{A})\,, \qquad \vec{\nabla} \times (\Phi\vec{A})\,.$$

   b) Berechnen Sie die elektrischen Felder $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ für die elektrischen Potentiale $\phi(\vec{r}) = q/r$ mit $q = konst.$ und $\phi(\vec{r}) = \vec{d} \cdot \vec{r}/r^3$ mit $\vec{d} = konst.$

– bitte wenden –

4. **Vektorfelder:**

a) Betrachten Sie das Geschindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$ mit konstantem Drehvektor $\vec{\omega}$ und das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \kappa \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ für $\vec{r} \neq 0$. Welches der Felder besitzt Quellen und/oder Wirbel?

b) Diskutieren Sie anhand der Integralsätze nach Gauß und Stokes für die beiden Beispiele aus a) die Begriffsbildungen

Quellstärke: $$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{O(\Delta V)} d\vec{f} \cdot \vec{A} \quad ,$$

Wirbelstärke: $$(\mathrm{rot}\vec{A})_k = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \lim_{\Delta f_k \to 0} \frac{1}{\Delta f_k} \oint_{\mathcal{C}(\Delta f_k)} d\vec{s} \cdot \vec{A} \quad .$$

In den obigen Ausdrücken bezeichnet ΔV das von dem Vektorfeld $\vec{A}$ durchströmte Volumenelement und $O(\Delta V)$ dessen Oberfläche; Δf_k bezeichnet die Komponente des (orientierten) Oberflächenelements $d\vec{f}$ in Richtung der k-ten Komponente von $\mathrm{rot}\vec{A}$ und $\mathcal{C}(\Delta f_k)$ dessen Randkurve .

5. **Einige Identitäten:**

Gegeben seien die Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$ im $\mathbf{R}^3$. Verifizieren Sie einige der folgenden Identitäten:

a) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$,

b) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A})$,

c) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$,

d) $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$,

e) $\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \frac{2}{|\vec{r}|}$, $\quad \vec{\nabla} \times \vec{n} = 0 \quad (\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|})$.

(Hinweis auf das Levi-Civita Symbol:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} ; \qquad \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{nmk} = \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn} ; \qquad \varepsilon_{ijk} = \left(\vec{E}_i \times \vec{E}_j \right) \cdot \vec{E}_k .$$

$\vec{E}_i$ bezeichne (z.B. Kartesische) Basisvektoren, für die $\vec{E}_i \cdot \vec{E}_k = \delta_{ij}$ gilt.)