Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Elektrodynamik WS 2008/09

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

10. Übung

1. **Lagrange-Funktion für ein Teilchen im Magnetfeld:**
Ein geladenes Punktteilchen bewege sich entlang der Trajektorie $\vec{r} = \vec{r}(t)$ in einem externen Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$ und einem elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}, t) - \partial_t \vec{A}(\vec{r}, t)$ unter dem Einfluss der Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})\right)$.

   a) Stellen Sie für dieses Bewegungsproblem die Lagrange-Funktion $L(\vec{r}, \vec{v}, t) = T(\vec{v}) - V(\vec{r}, \vec{v}, t)$ auf. (Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Gesamtenergie $\equiv$ Hamilton-Funktion im Fall von statischen externen Feldern. Identifizieren Sie dann den geschwindigkeitsabhängigen Potentialterm für den allgemeinen Fall.)

   b) Zeigen Sie, dass die entsprechende Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\vec{r}, \vec{v}, t)$ *eichinvariant* ist: untersuchen Sie, wie sich S unter der Eichtransformation $\left\{\vec{A}(\vec{r}, t) \to \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}, t), \Phi(\vec{r}, t) \to \Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r}, t)\right\}$ verhält.

   c) Formulieren Sie die Lagrange-Funktion für ein Teilchen, das sich in einem statischen, homogenen Magnetfeld $\vec{B} = Konst$ bewegt.

2. **Eigenschaften elektromagnetischer Wellen:**
Das elektrische Feld einer monochromatischen (zirkular polarisierten) Welle sei im quellenfreien Raum ($\rho = 0, \vec{j} = 0$) gegeben durch ($E_0, \vec{k}, \omega$ reell)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\,.$$

   a) Welche Bedingung müssen die Größen $\vec{k}$ und ω erfüllen?

   b) Berechnen Sie das zu dieser Welle gehörige Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

   c) Bestimmen Sie die Energiedichte w sowie die Energiestromdichte $\vec{S}$ der Welle.

– bitte wenden –

3. **Ausbreitungskern der Wellengleichung für ein Skalarfeld:**
Untersuchen Sie die Lösungen $u(\vec{r},t)$ der skalaren Wellengleichung in 3+1 Dimensionen

$$\Box u(\vec{r},t) = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\vec{r},t) = 0\,,$$

die den Anfangsbedingungen

$$u(\vec{r},0) = u_0(\vec{r})\,, \qquad \dot{u}(\vec{r},0) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\,u(\vec{r},t)\right)_{|t=0} = v_0(\vec{r})$$

genügt.

a) Zeigen Sie, dass

$$u(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left\{\alpha_-(\vec{k})\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + \alpha_+(\vec{k})\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)}\right\}$$

mit $\omega = c|\vec{k}|$ Lösung der Wellengleichung ist.

b) Die Fourier-Transformierten $\widetilde{u}_0(\vec{k})$ und $\widetilde{v}_0(\vec{k})$ der Anfangsbedingungen $u_0(\vec{r})$ und $v_0(\vec{r})$ sind über

$$\left\{\begin{array}{c}\widetilde{u}_0(\vec{k})\\ \widetilde{v}_0(\vec{k})\end{array}\right\} = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^{3/2}} \left\{\begin{array}{c}u_0(\vec{r})\\ v_0(\vec{r})\end{array}\right\} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

definiert. Drücken Sie α_- und α_+ durch $\tilde{u}_0$ und $\tilde{v}_0$ aus.

c) Der Ausbreitungskern $D(\vec{r},t)$ der skalaren Wellengleichung ist eine Lösung der homogenen Wellengleichung $\Box D(\vec{r},t) = 0$ zu den speziellen Anfangsbedingungen $D(\vec{r},0) = 0$ und $\dot{D}(\vec{r},0) = \delta(\vec{r})$. Zeigen Sie, dass das Faltungsintegral

$$u(\vec{r},t) = \int d^3r' \left\{u_0(\vec{r}\,')\,\dot{D}(\vec{r}-\vec{r}\,',t) + v_0(\vec{r}\,')\,D(\vec{r}-\vec{r}\,',t)\right\}$$

die Lösung $u(\vec{r},t)$ zu den gegebenen Anfangsbedingungen darstellt.

d) Bestimmen Sie den Ausbreitungskern $D(\vec{r},t)$ über die Fourier- Darstellung entsprechend zu Teil a) der Aufgabe. (Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Fourier-Transformierten der Anfangsbedingungen $D(\vec{r},0)$ und $\dot{D}(\vec{r},0)$.)