Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Elektrodynamik WS 2008/09

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

14. Übung

1. **Makroskopische Elektrodynamik – Telegraphengleichungen:**
Ein unendlich ausgedehntes, räumlich homogenes und isotropes, neutrales Medium werde durch die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, die Permeabilitätskonstante $\mu = \mu_0\mu_r$,und die Leitfähigkeit σ charakterisiert Es gelten die Beziehungen
$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t) = \mu\vec{H}(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t) = \sigma\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\rho(\vec{r},t) = 0$.

   a) Wieso heisst die Beziehung $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ auch "Ohmsches Gesetz"?

   b) Leiten Sie die sogenannten Telegraphengleichungen
$$\Delta\vec{V}(\vec{r},t) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{V}(\vec{r},t) - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{V}(\vec{r},t) = 0$$
für die elektromagnetischen Felder $\vec{V} = \{\vec{E},\vec{H}\}$ ab.

   c) Bestimmen Sie die einfachsten Lösungen der Telegraphengleichungen mittels der Ansätze
$$\left\{\begin{array}{c}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{H}(\vec{r},t)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{E}_0\\ \vec{H}_0\end{array}\right\} e^{i(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad \text{mit} \qquad \vec{\kappa} = \vec{k} + i\vec{\delta}\,.$$

   d) Diskutieren Sie qualitativ die Situation für die Wellenausbreitung entlang dünner Leiterdrähte.

2. **Elektromagnetische Felder einer uniform bewegten Punktladung:**
Eine Punktladung q bewege sich bezüglich eines Inertialsystems I mit uniformer Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$ entlang der Geraden $\vec{r}_q(t) = vt\,\vec{e}_x + y_0\,\vec{e}_y + z_0\,\vec{e}_z = \vec{r}_{q\,\|}(t) + \vec{r}_{q\,\perp}$. Für die räumliche Position der Ladung gilt dann bezüglich des Ruhesystems (Inertialsystem I') $\vec{r}_q'(t') = \vec{r}_{q\,\perp}' = \vec{r}_{q\,\perp}$. Für die Zeit $t' = t = 0$ mögen die Ursprüngen der Inertialsysteme I' und I zusammenfallen.

   Sie erinnern sich an einige Grundelemente der Speziellen Relativitätstheorie:
Die Komponenten $x^\mu = (x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ eines beliebigen Weltvektors (Ereignisses) $\underline{x}$ bezüglich I sind mit den Komponenten $x'^\mu = (x'^0 = ct', x'^1 = x', x'^2 = y', x'^3 = z')$ bezüglich I' über die eigentliche Lorentz-Transformation (L.T.)
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{Indexschreibweise:} \quad x'^\mu = L^\mu_\alpha\, x^\alpha$$
verknüpft, wobei $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = v/c$.

   Der Abstand zwischen zwei infinitesimal benachbarter Weltereignisse ds^2 ist eine Lorentz-Invariante, d.h. es gilt: $ds^2 = g_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = c^2dt'^2 = c^2dt^2 - (d\vec{r})^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = c^2d\tau$. Dabei sind $g_{\mu\nu}$ die kovarianten Komponenten des metrischen Tensors. Die Eigenzeit τ ist identisch mit der Koordinatenzeit t' bezüglich I'.

a) Zeigen Sie, dass sich die Kompomenten der Viererstromdichte

$$j^\mu(\underline{x}) = q \left. \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t(\tau)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_q(\tau)) = q \int d\tau \, \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \, \delta(\underline{x} - \underline{x}_q(\tau))$$

wie ein Lorentz-Vierervektor transformieren indem Sie zunächst zeigen, dass sich die vierdimensionale δ-Funktion wie ein Lorentz-Skalar verhält (invariant unter eigentlichen L.T.).

b) Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion der Wellengleichung ebenfalls Lorentz-invariant ist.

c) Welche Beziehung besteht zwischen der "retardierten Zeit t_{ret}" und der Eigenzeit τ?

d) Berechnen Sie aus den Komponenten des Viererpotentials A'^μ der Ladung bezüglich I' die Komponenten des (retardierten) Viererpotentials A^μ bezüglich I.

e) Wie lauten die Komponenten $F'^{\mu\nu}$ des Feldstärketensors bezüglich I'?

f) Der symmetrische Energie-Impuls-Tensor (EIT) des elektromagnetischen Feldes ist durch

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right)$$

gegeben.

Deuten Sie die $T^{0\nu}$-Komponenten des EIT sowie den physikalischen Gehalt der "Kontinuitätsgleichung" $\frac{\partial}{\partial x^\nu} T^{0\nu} = 0$.