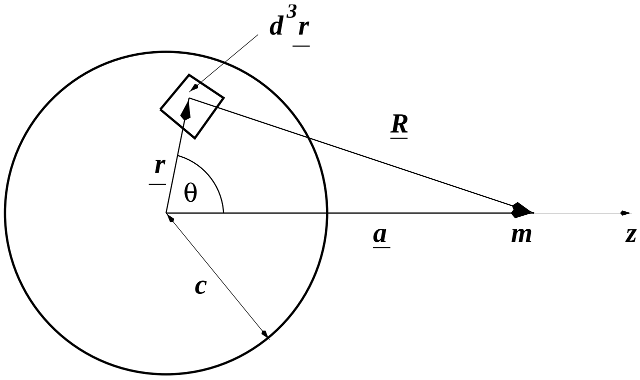
Institut für Theoretische Physik Prof. W. Strunz PD Dr. G. Plunien	**Elektrodynamik** **WS 2008/09**	

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

2. Übung

1. **Coulomb-Kraft:**
   Zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 im Abstand $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ wirkt die Coulomb-Kraft $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, q_1 q_2\, (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, q_1 q_2\, \vec{r}/r^3$. Gegeben sei eine homogen geladene Kugel mit Gesamtladung Q und Radius c. Im Abstand $a = |\vec{a}|$ vom Kugelmittelpunkt befinde sich eine Probeladung q.



   a) Geben Sie zunächst die Kraft $d\vec{F}$ an, die von einem Ladungselement dQ im Volumenelement d^3r (am Ort $\vec{r}$) der Kugel auf q ausgeübt wird.

   b) Berechnen Sie für $a > c$ die gesamte auf q ausgeübte Coulomb-Kraft $\vec{F}$. (Hinweise: Man führe dazu günstigerweise Kugelkoordinaten ein und lege die z-Achse in Richtung von $\vec{a}$. Die Integration über ϑ vereinfacht sich bei Einführung von $R = |\vec{r} - \vec{a}|$ als Integrationsvariable.)

   c) Welche Kraft ergibt sich für den Fall $a < c$?

2. **Die Diracsche δ-Funktion:**
   Eine Darstellung (Funktionenschar) $\delta_\eta(x), \eta \geq 0$ der Diracschen δ-Funktion (Distribution) ist charakterisiert durch die Eigenschaften:

$$\lim_{\eta\to 0} \delta_\eta(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & x \neq 0 \\ \infty & : & x = 0 \end{array} \right. , \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_\eta(x) = 1\,.$$

   Unter Beachtung der Reihenfolge von Integration und Limesbildung schreiben wir in Kurzform $\delta(x) = \lim_{\eta\to 0} \delta_\eta(x)$. Gegeben sei ferner die Menge aller beliebig oft differenzierbarer und für $|x| \to \infty$ beschränkter (Test-)Funktionen $f(x)$.

   a) Zeigen Sie, daß die Funktionen (η reell) $\delta_\eta(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{\eta^2}}}{\sqrt{\pi}\,\eta}$, $\qquad \delta_\eta(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\eta}{x^2 + \eta^2}$
   Darstellungen der δ-Funktion sind.

– bitte wenden –

b) Zeigen Sie mittels einer beliebigen Darstellung $\delta_\eta(x)$ folgende Eigenschaften der δ-Funktion:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta^{(n)}(x)\, f(x) &= (-1)^n f^{(n)}(0)\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,; \qquad (f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\, f(x)) \\
\delta\left[g(x)\right] &= \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}\,, \quad x_i = \text{einfache Nullstellen von } g(x)\,, \\
\delta(x^2-a^2) &= \frac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right]\,.
\end{aligned}$$

c) Die dreidimensionale δ-Funktion ist in Kartesischen Koordinaten durch $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$ mit $\int d^3r\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = 1$ definiert. Geben Sie die δ-Funktion in Kugelkoordinaten an.

3. **Krummlinige Koordinaten – Kugelkoordinaten:**
Bezüglich kartesischer Basisvektoren $\vec{E}_x\,, \vec{E}_y\,, \vec{E}_z$ lautet die Darstellung des Ortsvektors: $\vec{r} = x\vec{E}_x + y\vec{E}_y + z\vec{E}_z$. Die Transformationsgleichungen $x_i = x_i(q_j)$ zwischen kartesischen Koordinaten ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$) und Kugelkoordinaten ($q_1 = r, q_2 = \vartheta, q_3 = \varphi$) lauten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi\,,\quad z = r\cos\vartheta\,.$ (Überlegen Sie sich noch einmal die verschiedenen Koordinatenlinien und -flächen.)

a) Berechnen Sie die *natürlichen* lokalen Basisvektoren $\vec{h}_r\,, \vec{h}_\vartheta\,, \vec{h}_\varphi$ gemäß der Definition $\vec{h}_i = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$ sowie die *normierten* lokalen Basisvektoren $\vec{e}_r\,, \vec{e}_\vartheta\,, \vec{e}_\varphi$ gemäß der Definition $\vec{e}_i = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}/\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|$.
Wie lauten für dieses (orthogonale) Koordinatensystem die Skalenfaktoren $h_i = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|$?

b) Gegeben sei die Darstellung eines beliebigen Vektors

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x(\vec{r})\,\vec{E}_x + A_y(\vec{r})\,\vec{E}_y + A_z(\vec{r})\,\vec{E}_z = \tilde{A}_r(\vec{r})\,\vec{e}_r + \tilde{A}_\vartheta(\vec{r})\,\vec{e}_\vartheta + \tilde{A}_\varphi(\vec{r})\,\vec{e}_\varphi.$$

Wie berechnen sich die Komponenten $\tilde{A}_r(\vec{r})\,, \tilde{A}_\vartheta(\vec{r})\,, \tilde{A}_\varphi(\vec{r})$ aus den kartesischen Komponenten?

c) Berechnen Sie die Komponenten eines Verschiebungsvektors $d\vec{r}$ bezüglich der natürlichen Basisvektoren $\vec{h}_i$ und der normierten Basisvektoren $\vec{e}_i$. Berechnen Sie für Kugelkoordinaten das Abstandsquadrat $d\ell^2 = |d\vec{r}|^2$, das Volumenelement $dV \equiv d^3r$ sowie die Komponenten $d\tilde{f}_r\,, d\tilde{f}_\vartheta\,, d\tilde{f}_\varphi$ des Oberflächenelements $d\vec{f}$ jeweils für die Koordinatenflächen $r = konst.$, $\vartheta = konst.$ und $\varphi = konst.$.

d) Leiten Sie den allgemeinen Ausdruck für die Divergenz eines kugelsymmetrischen elektrischen Feldes her. (Hinweis: Definition der Divergenz als Quellstärke.)
Berechnen Sie konkret aus dem elektrischen Feld eines Wasserstoffatoms $\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-ar}}{r^2}\,\vec{e}_r$ die felderzeugende Ladungsdichte $\rho(r)$. Zeigen Sie ferner, dass die Gesamtladung Null ist und interpretieren Sie das Ergebnis.