Institut für
Theoretische Physik
Prof. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Elektrodynamik WS 2008/09

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

3. Übung

1. **Fluß eines elektrischen Feldes:**
Gegeben ist das Potential $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\, r}$ einer Punktladung q. Berechnen Sie den Fluß $\Phi = \oint d\vec{f}\cdot\vec{E}$ des elektrischen Feldes $\vec{E}$ durch eine Kugel mit Radius R um den Koordinatenursprung. Was resultiert für den Fluß Φ eines Feldes $\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{\nabla}(\vec{d}\cdot\vec{r}/r^3)$?

2. **Feld sphärisch symmetrischer Ladungsverteilungen:**
Berechnen Sie die Feldstärke $\vec{E}$ einer homogen geladenen Kugel (Radius R und Raumladungsdichte ρ_0) und einer homogen geladenen Kugelschale (Radius R und Flächenladungsdichte σ_0) mit Hilfe des Gaußschen Satzes.

3. **Greensche Funktion der Poisson-Gleichung:**
Es soll jeweils die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung in einer und zwei Dimensionen durch Lösen der entsprechenden Differentialgleichungen bestimmt werden.

   a) *Dimension $d = 1$:* Zeigen Sie zunächst, dass in einer Dimension die Delta-Funktion die Darstellung

   $$\delta(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x) \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

   hat. Bestimmen Sie damit durch Lösen der Differentialgleichung

   $$\frac{d^2}{dx^2}G(x,x') = \delta(x-x')$$

   die Greensche Funktion $G(x,x')$ für die Poisson-Gleichung in einer Dimension.

   b) *Dimension $d = 2$:* Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ in zwei Dimensionen durch Lösen der Differentialgleichung

   $$\nabla^2_{\vec{r}}\, G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,.$$

   Gehen Sie dabei vom Ansatz $G(\vec{r},\vec{r}\,') = G(|\vec{r}-\vec{r}\,'|)$ aus, der durch die Translations- und Rotationsinvarianz des Laplace-Operators nahegelegt wird. Der Laplace-Operator in zwei Dimensionen lautet in Polarkoordinaten (ρ,ϕ)

   $$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

   Hinweis: Konkretisieren Sie für dieses 2 dimensionale Problem den Gaußschen Satz.

4. **Eindeutigkeit der Lösungen von Randwertproblemen**
Zeigen Sie, dass die Lösung der Poisson-Gleichung in einem Volumen V,

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = h(\vec{r}) \quad \text{für } \vec{r} \in V$$

für Dirichletsche Randbedingungen $\Phi(\vec{r}) = a(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in \partial V$ (∂V bezeichnet den Rand von V) eindeutig ist und für Neumannsche Randbedingungen $\vec{n} \cdot \nabla\Phi(\vec{r}) = b(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in \partial V$ bis auf eine additive Konstante festgelegt ist.

Hinweis: Betrachten Sie für zwei Lösungen Φ_1 und Φ_2 des Problems die Funktion $u = \Phi_1 - \Phi_2$. Beweisen Sie zunächst mittels der 1. Greenschen Identität die Beziehung $\int_V (\nabla u(\vec{r}))^2 \, d^3\vec{r} = 0$ und folgern Sie daraus die Eindeutigkeit.