Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Elektrodynamik WS 2008/09

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

4. Übung

1. **Kugelkondensator:**
Zwei konzentrische leitende Kugelschalen (Radien $R_1 < R_2$) tragen die Ladungen $Q_1 = Q$ und $Q_2 = -Q$. Finden Sie:

   a) das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im ganzen Raum

   b) das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ im ganzen Raum (Randbedingung $\phi(\infty) = 0$)

   c) den Zusammenhang zwischen den Ladungen und den Potentialwerten der Kugelschalen.

2. **Earnshaw-Theorem:**
Das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ in einem ladungsfreien Raumvolumen V mit Rand ∂V ist Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\phi(\vec{r}) = 0$. Die felderzeugende Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$ befinde sich außerhalb von V.

   a) Zeigen Sie zunächst den folgenden *Mittelwertsatz*:
   Der Wert des Potentials $\phi(\vec{r}_0)$ an einer Stelle $\vec{r}_0$ innerhalb von V (nicht auf ∂V) ist gleich dem Mittelwert des Potentials $\overline{\phi}_{\partial K_\varepsilon} = \int_{\partial K_\varepsilon} df\, \phi(\vec{r}) / \int_{\partial K_\varepsilon} df$ auf der Oberfläche ∂K_ε einer Kugel K_ε (Mittelpunkt $\vec{r}_0$ und beliebiger Radius ε, $K_\varepsilon \subset V$).
   Hinweis: Verwenden Sie das 2. Greensche Theorem
   $$\int_{K_\varepsilon} d^3r\ (\psi(\vec{r})\Delta\chi(\vec{r}) - \chi(\vec{r})\Delta\psi(\vec{r})) = \int_{\partial K_\varepsilon} d\vec{f} \cdot \Big(\psi(\vec{r})\vec{\nabla}\chi(\vec{r}) - \chi(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\Big)$$
   mit folgender Wahl für die skalaren Funktionen: $\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$ und $\chi(\vec{r}) = \phi(\vec{r})$.

   b) Zeigen Sie nun das *Earnshaw-Theorem (1842)*:
   Im ladungsfreien (leeren) Raum gibt es kein elektrostatisches Feld $\phi(\vec{r})$, welches ein geladenes Teilchen im *stabilen* Gleichgewicht halten könnte.
   Diskutieren Sie die Konsequenzen dieses Theorems hinsichtlich des Problems der Speicherung geladener Teilchen in Fallen.
   (Literatur: Earnshaw, S., On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether., 1842, Trans. Camb. Phil. Soc., 7, pp 97-112.)

3. **Dirichletsches Randwertproblem:**
Eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ befinde sich zwischen zwei unendlichen, parallelen und idealleitenden Platten. Die beiden Leiterplatten ($y-z$-Ebene) seien bei $x = 0$ und $x = a$ positioniert und beide auf Nullpotential.

   a) Leiten Sie die Dirichlet'sche Greensche Funktion $G_{\mathrm{D}}(\vec{r}, \vec{r}\,')$ im Raumgebiet zwischen den Leiterplatten mit Hilfe der Spiegelladungsmethode her.
   (Hinweis: Bei $\vec{r}_0 \equiv \vec{r}\,' = x'\vec{E}_x + \vec{r}\,'_{||}$ befinde sich eine Punktladung q. Bestimmen Sie zunächst die Positionen aller Spiegelladungen.)

   b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ zwischen den Leiterplatten, welches durch eine dort befindliche Punktladung erzeugt wird.