Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Elektrodynamik WS 2008/09

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

5. Übung

1. **Leitende Kugel im Feld einer Punktladung:**
   Eine leitende Kugel (Radius R) befindet sich im äußeren elektrostatischen Feld einer Punktladung q (bei $|\vec{r}_0| \geq R$). Bestimmen Sie das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ unter den Randbedingungen $\Phi(|\vec{r}| = R) = 0 = \Phi(|\vec{r}| \to \infty)$. Konstruieren Sie die Greensche Funktion $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$ für dieses Problem mittels der Bildladungsmethode.
   (Hinweis: Verwenden Sie hierzu eine geeignete Bildladung $\tilde{q}$, welche auf der Verbindungsachse vom Kugelmittelpunkt und der Punktladung q liegt.)

2. **Lösung der Laplace-Gleichung – Separation der Variablen:**
   Bestimmen Sie in Anlehnung an die Vorlesung das Potential $\Phi(x, y, x)$ als Lösung von $\Delta\Phi(x, y, z) = 0$ im Inneren eines quaderförmigen Kastens ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$) auf dessen Oberfläche das elektrostatische Potential Φ wie folgt vorgegeben sei: die Quaderfläche $y = b$ liege auf vorgegebenem Potential $\Phi_b(x, z) = \Phi_0 \cdot (x/a)(1 - (x/a)) \sin(\pi z/c)$ (mit konstantem Φ_0), während auf den verbleibenden fünf Quaderflächen $\Phi = 0$ sein soll.

3. **Leitende Kugel im homogenen Feld:**
   Eine leitende Kugel (Radius R) befinde sich in einem statischen elektrischen Feld, das in großer Entfernung von der Kugel homogen ist und in z-Richtung zeige. (Das Feld könnte z.B. durch einen Plattenkondensator erzeugt werden, dessen Abmessungen groß sind im Vergleich zum Radius der Kugel.)

   Das Potential $\Phi(\vec{r})$ im Inneren der Kugel ist $\Phi(\vec{r}) \equiv \Phi_0 = konst.$ (warum?)

   Gesucht ist das Potential außerhalb der Kugel. Verwenden Sie dazu Koordinaten, die der Symmetrie des Problems angepasst sind. Überlegen Sie sich zunächst, dass das Potential folgende Randbedingungen erfüllen muss:

$$\begin{aligned} \Phi(R, \theta) &= \Phi_0\,, \\ \Phi(r, \theta) &\xrightarrow{r\to\infty} -E_0 r \cos\theta + Konst. \end{aligned}$$

   Hierbei ist E_0 der Betrag des elektrischen Feldes in großer Entfernung von der Kugel.

4. **Orthogonalpolynome:**
   Über dem endlichen (oder unendlichen) Intervall I sei eine stetige positive Gewichtsfunktion (*weight function*) $w(x)$ mit der Eigenschaft gegeben, dass das Integral $\int_I dx\, w(x)\mathcal{P}(x)$ für ein beliebiges Polynom $\mathcal{P}(x)$ existiert. Die Polynome vom Grad $n \geq 0$, für die

$$\langle p_n, p_m \rangle := \int\limits_I dx\, w(x) p_n(x) p_m(x) = \delta_{nm}$$

   gilt, heißen (normierte) Orthogonalpolynome zur Gewichtsfunktion $w(x)$ auf dem Intervall I.

– bitte wenden –

Betrachten Sie nun das Intervall $I = [-1, 1]$ zusammen mit der Gewichtsfunktion $w(x) = 1$. Leiten Sie die ersten Orthogonalpolynome $p_n(x), n = 0, 1, 2, 3$ her. Gehen Sie dabei von den linear unabhängigen Potenzfunktionen $\tilde{p}_n(x) = x^n$ aus und orthogonalisieren Sie diese mittels des Schmidtschen Verfahrens:

$$p_n(x) = \frac{c_n(x)}{\sqrt{\langle c_n, c_n \rangle}}\,, \qquad c_n(x) = \tilde{p}_n(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \langle \tilde{p}_n, p_m \rangle \, p_m(x)\,.$$

(Zwischen den orthonormalen Polynomen $p_n(x)$ und den Legendre-Polynomen $P_n(x)$ besteht der Zusammenhang: $p_n(x) = \sqrt{(2n+1)/2}\, P_n(x)$).