7. Übung

1. **Elektrische Feldenergie und Wechselwirkungsenergie:**

   a) Zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 befinden sich an den Orten $\vec{R}_1$ und $\vec{R}_2$. Leiten Sie aus dem Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie W_{12} das Coulomb-Gesetz her.

   b) Ein im Ursprung eines Koordinatensystems befindlicher Punktdipol $\vec{P}_1$ erzeugt ein elektrisches Potential $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\vec{P}_1 \cdot \vec{r})/r^3$. Am Ort $\vec{r}$ befinde sich ein zweiter Punktdipol $\vec{P}_2$. Berechnen Sie die Wechselwirkungsenergie W_{12} der beiden Dipole.
   Schreiben Sie die Wechselwirkungsenergie $W_{12}(r, \gamma_1, \gamma_2)$ als Funktion von r und der Orientierungswinkel ($\gamma_i \measuredangle \vec{P}_i, \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$) auf.
   Diskutieren Sie deren Abhängigkeit von den Orientierungswinkel für spezielle Konfigurationen (Werte γ_i).

2. **Energie und Kapazität:**
   In der Vorlesung wurde die Energie W einer Ladungsverteilung ρ hergeleitet:

   $$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})\,.$$

   Überlegen Sie sich davon ausgehend den Zusammenhang zwischen der potentielle Energie W eines Systems von Leiterflächen und den Kapazitätskoeffizienten C_{ij}.
   Betrachten Sie insbesondere den Kugelkondensator (Radien R_1, R_2 mit Ladungen $Q_1 = -Q_2 = Q$) aus Aufgabe 3, 4. Übungsblatt und leiten Sie die Beziehung $W = \frac{1}{2}CU^2$ her.

3. **Multipolmomente einer deformierten Kugel:**
   Die Oberfläche einer homogen geladenen, deformierten Kugel werde durch den winkelabhängigen Radius $R(\theta) = R_0 \left[1 + \frac{a}{2}(3\cos^2(\theta) - 1)\right]$ parametrisiert. Berechnen Sie die führenden Multipolmomente $q_{\ell m}$ der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ unter der Annahme kleiner Deformation $a \ll 1$.

4. **Ampèrsches Durchflutungsgesetz:**

   a) Ein (unendlich) langer zylindrischer Leiter (Radius R) werde homogen von einem Strom I durchflossen. Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ im ganzen Raum.

   b) In dem Leiter befinde sich nun ein zylindrischer Hohlraum (Radius R_1), dessen Achse im Abstand a paralell zur Leiterachse verläuft. Die homogene Stromdichte $\vec{j}$ habe denselben Wert wie in Teil (a).
   Berechnen Sie $\vec{B}(\vec{r})$ im ganzen Raum. (Hinweis: Superpositionsprinzip.)