Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Thermodynamik + Statistik **WS 10/11**

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

5. Übung

1. **Random Walk und Diffusionsgleichung:**

a) Ein Teilchen bei $x = 0$ wird durch zufällige Stöße auf der x-Achse mit der Wahrscheinlichkeit p nach rechts und mit der Wahrscheinlichkeit q nach links verschoben. Die Verschiebung pro Stoß betrage ℓ.

i. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen nach N Stößen bei $x = n\ell$ zu finden?

ii. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen nach N Stößen ($N \gg 1$) in der Ausgangsposition zu finden?

b) Jeweils nach der Zeit Δt erfolge der i-te Schritt $d_i = \pm\ell$ eines random walk mit den Einzelwahrscheinlichkeiten $p = q = 1/2$. Daraus ergibt sich im Grenzfall großer Schrittzahlen $N = t/\Delta t \gg 1$ eine zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x,t)$ dafür, das Teilchen an der Stelle $x = \sum_{i=1}^{N} d_i$ zu finden.

i. Zeigen Sie, daß $P(x,t)$ die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \mathcal{D}\,\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$$

erfüllt.

ii. Bestimmen Sie die Diffusionskonstante $\mathcal{D}$ sowie das mittlere Abstandsquadrat $\overline{x^2}$ in Abhängigkeit von $\mathcal{D}$ und t.

iii. Berechnen Sie die zu der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x,t)$ gehörige Entropie $S(t)$ und zeigen Sie, daß $\frac{d}{dt}\,S(t) \geq 0$ gilt.

2. **Nützliche Integrale:**

Berechnen Sie die Integrale vom Typ

$$\begin{aligned}
I(s,\lambda) &= \int_0^\infty dx\, x^s\, e^{-\lambda x^2}\,, \quad s \geq 0 \quad \text{und ganzzahlig}\,, \quad \lambda > 0\,, \\
J(s) &= \int_0^\infty dx\, x^s\, e^{-x}\,, \quad s > -1 \quad \text{ganz- oder halbzahlig}\,.
\end{aligned}$$

Hinweis: Berechnen Sie zuerst $I^2(0,\lambda)$ und $I(1,\lambda)$ und führen Sie die Integrale für $s > 1$ auf diese zurück. Führen Sie $J(s)$ auf $J(0)$ bzw. $J(-1/2)$ zurück.

– bitte wenden –

3. **Summe von zwei Zufallsvariablen:**

   Zwei voneinander unabhängige Zufallsvariablen x und y genügen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P_1(x)$ und $P_2(y)$ (mit Variablenbereichen $(-\infty, +\infty)$). Beide Verteilungen werden jeweils durch die Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$ und die Schwankungen Δx und Δy charakterisiert und seien ansonsten beliebig. Geben Sie einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(z)$ für die Summe $z = x + y$ an. Berechnen Sie die Scharmittelwerte $\overline{z}$ und $\overline{z^2}$ sowie die Breite von Δz.

4. **Phasenraum des eindimensionalen harmonischen Oszillators:**

   Berechnen Sie das Phasenraumvolumen

$$\Phi(E) = \int\limits_{H \leq E} dx \, \frac{dp}{(2\pi\hbar)}$$

   für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator (Masse m, Kreisfrequenz ω) und die zugehörige Anzahl von Mikrozuständen. Vergleichen Sie dieses Resultat mit der exakten Anzahl von Energieeigenzuständen unterhalb der Energie E.

5. **Entropie eines idealen Gases:**

   a) Berechnen Sie das Volumen $V_d(R) = C_d \, R^d$ einer d-dimensionalen Kugel ($d \geq 1$) mit Radius R.

   Hinweis: Zur Berechnung der Konstanten C_d gehen Sie von der Beziehung

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_d \exp\left(-\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right) = \int\limits_{0}^{\infty} dR \left(\frac{dV_d}{dR}\right) e^{-R^2}$$

   aus.

   b) Berechnen Sie die Anzahl der Mikrozustände

$$\Omega(E, V, N) = \int\limits_{E-\Delta E \leq H \leq E} d^{3N}x \, \frac{d^{3N}p}{(2\pi\hbar)^{3N}}$$

   für ein klassisches ideales Gas und daraus die Entropie $S(E, V, N)$.