Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Thermodynamik + Statistik WS 10/11

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

1. Übung

1. Erinnerungen an vollständige Differentiale:

a) Gegeben sei ein Wegintegral entlang einer Kurve $\mathcal{C}$ von $P_1 = (x_1, y_1)$ nach $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$I_{\mathcal{C}} = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \{A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy\} \equiv \int_{\mathcal{C}} d\Phi(x,y)\,.$$

(Bemerkung: Hier markieren (x,y) Punkte im Konfigurationsraum, welcher durch die unabhängigen Zustandsvariablen x und y parametrisiert wird.)
Zeigen Sie, daß $I_{\mathcal{C}}$ genau dann wegunabhängig ist, wenn für die partiellen Ableitungen (bei jeweils festem zweiten Argument) gilt:
$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y \quad \longleftrightarrow \quad d\phi(x,y)$ ist ein vollständiges Differential.

b) Stellt der Ausdruck $d\phi(x,y) = xy\,dx + x^2\,dy$ ein vollständiges Differential dar?

c) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $g(x,y)$ so, daß $d\tilde{\phi}(x,y) = g(x,y)d\phi(x,y) = g(x,y)xy\,dx + g(x,y)x^2\,dy$ ein vollständiges Differential ist.

2. Zustandsvariablen und Zustandsfunktionen:

Ein thermodynamisches System werde durch *zwei* Zustandsvariablen *vollständig* beschrieben. Zwischen drei Zustandsvariablen x, y, z besteht dann *ein* Zusammenhang (Zustandsgleichung) der Form $z = z(x,y)$, $x = x(y,z)$ bzw. $y = y(x,z)$.

a) Zeigen Sie, daß für die ersten partiellen Ableitungen die folgende Relation gilt:
$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$

b) Die Zustandsvariable $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_r)$ sei eine homogene Funktion vom Grade n, d.h. es gelte $\phi(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_r) = \lambda^n\,\phi(x_1, \ldots, x_r)$, für beliebige λ und n ganz. Zeigen Sie, daß für differenzierbare, homogene Funktionen ϕ die Eulersche Beziehung gilt: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,x_i = n\,\phi.$

3. Volumenarbeit, Druck und Kompressibilität:

a) Begründen Sie ausgehend von dem Arbeitsintegral $A = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,'$ über ein (z.B. konservatives) Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ den Zusammenhang zwischen der mit einer Volumenänderung ΔV des Systems verknüpften Volumenarbeit $A = -\int_{\Delta V} p(\vec{r}\,')\,dV'$ und der Druckfunktion $p(\vec{r})$.

b) Beispiel: Sei $E(R) = \frac{3q^2}{5R}$ die Coulomb-Energie (Selbstenergie) der statischen, homogenen Ladungsdichteverteilung $\rho(r) = \frac{3q^2}{4\pi R^3}\,\Theta(R - r)$ mit Radius R und Gesamtladung q.

– *bitte wenden* –

i. Welche Volumenarbeit ΔA muß gegen die repulsive Coulomb-Wechselwirkung aufgewendet werden, um die Ladungsverteilung von einem anfänglichem Radius R um ΔR zu komprimieren?

ii. Welcher Druck $p(R)$ bzw. $p(V)$ ist erforderlich, um die Ladungsverteilung auf dem Radius R bzw. dem Volumen $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ zu halten?

iii. Berechnen Sie die Kompressibilität $\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$.

4. **Zustandsgleichung des idealen Gases:**
Eine Gasblase verdreifacht ihr Volumen beim Aufsteigen vom Grund eines Sees zur Oberfläche. Schätzen Sie die Tiefe des Sees ab.