Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Thermodynamik + Statistik WS 10/11

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

4. Übung

1. **Durchmischung eines Gases:**

   Ein abgeschlossener Behälter (Volumen V) wird durch eine Trennwand in zwei Bereiche mit Volumen V_1 bzw. V_2 aufgeteilt. In jedem Teilvolumen befinden sich N Teilchen desselben (monoatomaren) idealen Gases. Die Temperaturen T_1 und T_2 seien so gewählt, daß der Druck in beiden Teilbereichen gleich ist, d.h. $p_1 = p_2 = p_0$.

   Die Wand werde nun entfernt. Berechnen Sie die Temperatur T und den Druck p des sich im Volumen V einstellenden Gleichgewichtszustands.

   Berechnen Sie ferner die Entropieänderung in Abhängigkeit von T_1, T_2 und N.

2. **Gemeinsamer Geburtstag:**

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_N dafür, daß innerhalb einer Gruppe von N Personen mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben? Bei welcher Mindestanzahl N_{min} übersteigt die Wahrscheinlichkeit P_N den Wert 1/2?

3. **Kombinatorik mit Edelgasatomen:**

   Ein Kasten (Volumen V) wird durch eine Zwischenwand im Verhältnis 4:1 in zwei Bereiche geteilt. Im größeren Teilvolumen mögen sich $N_{\mathrm{Ne}} = 1000$ Neonatome befinden, im kleineren $N_{\mathrm{He}} = 100$ Heliumatome. Es werde nun ein kleines Loch geöffnet und solange gewartet, bis wieder Gleichgewicht herrscht.

   a) Wie groß ist die mittlere Anzahl der Atome jeder Sorte in jedem Teilvolumen?

   b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß wieder die Ausgangsverteilung (1000 Neonatome im größeren und 100 Heliumatome im kleineren Teilvolumen) vorliegt.

4. **Gammafunktion und Näherungsausdruck für Fakultäten:**

   Die Integraldarstellung für die Eulersche *Gammafunktion* lautet:

   $$\Gamma(z) = \int_0^\infty dx\, x^{z-1}\, e^{-x}\,, \qquad \Re(z) > 0\,. \tag{1}$$

   a) Zeigen Sie die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ und überzeugen Sie sich davon, daß für natürliche Zahlen n gilt: $\Gamma(n+1) = n!$.

   b) Leiten Sie aus Gl. (1) die Stirlingsche Formel ab:

   $$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\,, \qquad n \gg 1\,. \tag{2}$$

   Hinweis: Entwickeln Sie den Logarithmus des Integraden von $\Gamma(n+1)$ um sein Maximum und werten Sie das Eulersche Integral (1) näherungsweise aus.

– bitte wenden –

5. **Poisson-Verteilung aus Binomialverteilung:**

a) Berechnen Sie das Schwankungsquadrat $(\Delta n)^2 = \overline{n^2} - \overline{n}^2$ für die der Binomialverteilung

$$W_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}\, p^n q^{N-n} \quad \text{mit} \quad p + q = 1\,. \tag{3}$$

b) Zeigen Sie, daß die Binomialverteilung (mit dem Mittelwert $Np = \overline{n}$) für $N \gg 1$, $N \gg n$ und $p \ll 1$ in die Poisson-Verteilung

$$w(n) = \frac{\overline{n}^n}{n!}\, e^{-\overline{n}}$$

übergeht.

6. **Binomialverteilung und Normalverteilung:**

a) Bestimmen Sie mittels der Stirling Formel (2) aus Aufgabe 4b) den Wert $W_N(\overline{n})$ der Binomialverteilung (3) aus Aufgabe 5 an der Stelle des Mittelwerts $\overline{n} = Np$. Es gelte $Npq \gg 1$.

b) Leiten Sie aus der Binomialverteilung $W_N(n)$ die Gaußsche Normalverteilung her, indem Sie wieder unter der maßgeblichen Bedingung $Npq \gg 1$ die Funktion $\ln[W_N(n)]$ um den Mittelwert $\overline{n} = Np$ nach Taylor entwickeln.