Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Thermodynamik + Statistik **WS 10/11**

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

7. Übung

1. **Eigenschaften der Wigner-Funktion:**

Auf Eugen Wigner geht die Idee zurück [E.P. Wigner, Physical Review 40 (1932) 749 (siehe Materialien)], einem gegebenen quantenmechanischen Zustand $|\psi\rangle$ bzw. Wellenfunktion $\psi(x)$ (oder $\tilde{\psi}(p)$) eine reelle Funktion $W_\psi(x,p)$ auf dem Phasenraum zuzuordnen: $\psi(x) \to W_\psi(x,p)$. Der Einfachheit wegen betrachten wir ein System mit nur einem Freiheitsgrad (2-dimensionaler Phasenraum) und definieren zunächst die Wigner-Funktion W_ψ des reinen Zustands $|\psi\rangle$:

$$W_\psi(x,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dy\,\psi^*(x-\frac{y}{2})\psi(x+\frac{y}{2})\,e^{-\frac{i}{\hbar}py}\,.$$

a) Überzeugen Sie sich davon, daß die Wigner-Funktion reell ist.

b) Zeigen Sie die folgenden Beziehungen zwischen den Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten im Orts- bzw. Impulsraum und der Wigner-Funktion sowie deren Normiertheit:

$$\int dp\,W_\psi(x,p) = |\psi(x)|^2\,, \quad \int dx\,W_\psi(x,p) = |\tilde{\psi}(p)|^2\,, \quad \int dxdp\,W_\psi(x,p) = \langle\psi|\psi\rangle = 1\,.$$

c) Beweisen Sie die „Produktregel": $2\pi\hbar\int dxdp\,W_{\psi_1}(x,p)W_{\psi_2}(x,p) = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$.
Zeigen Sie mit ihrer Hilfe, daß die Wigner-Funktion $W_\psi(x,p)$
(i) auch negative Werte annimmt und
(ii) nicht in einem Phasenraumvolumen $\int dxdp = A \leq 2\pi\hbar$ lokalisiert sein kann.

2. **Weyl-Operator und Wigner-Funktion:**

a) Die Wigner-Funktion eines reinen Zustands $|\psi(t)\rangle$ kann als Matrixelement des Weyl-Operators $\hat{W}$ angesehen werden: $W_\psi(x,p,t) = \langle\psi(t)|\hat{W}(x,p)|\psi(t)\rangle$.
Überzeugen Sie sich von der Kompatibilität der beiden Darstellungen

$$\begin{aligned}\hat{W}(x,p) &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dy\,\left|x-\frac{y}{2}\right\rangle\left\langle x+\frac{y}{2}\right|\,e^{-\frac{i}{\hbar}py}\,,\\ \hat{W}(x,p) &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dy\,\left|p-\frac{y}{2}\right\rangle\left\langle p+\frac{y}{2}\right|\,e^{\frac{i}{\hbar}xy}\end{aligned}$$

mit den in Aufgabe 1 gezeigten Eigenschaften.

– *bitte wenden* –

b) Zeigen Sie, daß die Wigner-Funktion $W_\rho(x,p,t)$ eines quantenmechanischen Gemisches $\hat{\rho}(t) = \sum_n a_n \, |\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t)|$ die Weyl-Transformierte des Dichteoperators ist:

$$W_\rho(x,p,t) := \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy \, \left\langle x + \frac{y}{2} \right| \hat{\rho}(t) \left| x - \frac{y}{2} \right\rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar}\, py}$$

und somit auf die Zeitevolutionsgleichung für die Wigner-Funktion führt:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_\rho(x,p,t) = -\frac{1}{i\hbar} \sum_n a_n \, \langle\psi_n(t)|[\hat{H}(t), \hat{W}(x,p)]|\psi_n(t)\rangle \, . \tag{1}$$

3. **Zeitevolution der Wigner-Funktion und Liouville-Gleichung:**

Ein quantenmechanisches System (1 Freiheitsgrad) werde näherungsweise durch den quadratischen Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \, \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \, \hat{x}^2 \tag{2}$$

beschrieben.

a) Zeigen Sie die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \hat{x}\hat{W} &= \left(x + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p} \right) \hat{W} \, , \qquad \hat{W}\hat{x} = \left(x - \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p} \right) \hat{W} \, , \\ \hat{p}\hat{W} &= \left(p - \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{W} \, , \qquad \hat{W}\hat{p} = \left(p + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{W} \, . \end{aligned}$$

b) Verwenden Sie nun diese Beziehungen und berechnen Sie gemäß Gl. (1) die zeitliche Änderung der Wigner-Funktion für den Hamilton-Operator (2).

Zur Ermutigung geben wir das Resultat an:

$$\frac{\partial W_\rho}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} \sum_n a_n \, \langle\psi_n| \left\{ -\frac{\hbar}{i} \frac{p}{m} \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} + \frac{\hbar}{i} m\omega^2 x \frac{\partial \hat{W}}{\partial p} \right\} |\psi_n\rangle \, . \tag{3}$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe von (3) das bemerkenswerte Resultat, wonach für das betrachtete System die Bewegungsgleichung für die Wigner-Funktion mit der klassischen Liouville-Gleichung für die Phasenraumverteilungsfunktion identisch ist:

$$\frac{\partial W_\rho}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial W_\rho}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial W_\rho}{\partial x} = \{H, W_\rho\} \, . \tag{4}$$

d) Was ändert sich an der Bewegungsgleichung (4), wenn $\hat{H}$ ein allgemeines, polynomiales Wechselwirkungspotential $\hat{V}(\hat{x})$ enthält (z.B. $\hat{V}(\hat{x}) = \lambda \hat{x}^4$)?