8. Übung

1. Spins im Magnetfeld:

Gegeben sei ein isoliertes System von N nichtwechselwirkenden, unabhängigen Spins in einem konstanten externen Magnetfeld. Die Energie eines einzelnen Spins $\uparrow$ (bzw. $\downarrow$) sei $\varepsilon_\uparrow = \frac{\varepsilon_0}{2}$ (bzw. $\varepsilon_\downarrow = -\frac{\varepsilon_0}{2}$).

a) Wie groß sind bei vorgegebener Gesamtenergie E die Wahrscheinlichkeiten $f_\uparrow$ bzw. $f_\downarrow$ für einen einzelnen Spin $\uparrow$ bzw. $\downarrow$?
Bestimmen Sie die Anzahl $\Omega(E)$ der möglichen Zustände mit Gesamtenergie E innerhalb des Energieintervalls $[E - \delta E, E]$.

b) Berechnen Sie die Entropie $S(E)$ des Systems. Wie lautet die Entropie als Funktion der Variablen $\frac{E}{E_0}$ mit $E_0 = N\varepsilon_0$?

c) Im Rahmen der statistischen Deutung der Thermodynamik wird die Temperatur T eines (abgeschlossenen) Systems im thermodynamischen Gleichgewicht über $\dfrac{1}{T} = \dfrac{\partial S(E)}{\partial E}$ definiert.
Zeigen Sie, daß gilt: $\dfrac{f_\uparrow}{f_\downarrow} = e^{-\varepsilon_0/k_B T}$. Wie lauten folglich $f_\uparrow$ und $f_\downarrow$ in Abhängigkeit von T?

d) Für ein System von Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen im Magnetfeld B ist $\varepsilon_0 = g\mu_B\, B$ gegeben (g gyromagnetischer Faktor, μ_B Bohr'sches Magneton). Berechnen Sie die Magnetisierung (totale magnetische Moment) $\mathcal{M}$ des Systems. Was resultiert im Grenzfall $B \ll \frac{k_B T}{g\mu_B}$?

2. Maxwell-Boltzmann-Verteilung und mikrokanonische Gesamtheit:

Gegeben sei ein isoliertes, klassisches System bestehend aus N unterscheidbaren nichtwechselwirkenden Teilchen ($N \gg 1$) in einer räumlichen Dimension endlicher Ausdehnung. Bei festem Wert der Gesamtenergie

$$E = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{2}\, v_i^2 = \sum_{j=1}^{N} \tilde{p}_j^2 \equiv \vec{\tilde{p}}^{\,2} \equiv R^2 \qquad \tilde{p}_j = \sqrt{\frac{m}{2}} v_j = \frac{p_j}{\sqrt{2m}} \tag{1}$$

werden die möglichen Mikrozustände durch Koordinaten $\{\tilde{p}_j,\, j = 1, 2, \ldots, N\}$ im Impulsraum sowie durch entsprechende Koordinaten $\{x_j,\, j = 1, 2, \ldots, N\}$ im Ortsraum charakterisiert. Für eine feste Energie $E = R^2$ wird die Zeitevolution des N-Teilchensystems durch eine Trajektorie $\vec{\tilde{p}}^{\,2}$ auf der Oberfläche einer N-Sphäre $\mathbb{S}^N$ im Impulsraum beschrieben. Die Oberfläche $\mathcal{S}_N$ ist durch den Radius $R = \sqrt{E}$ bestimmt: $\mathcal{S}_N(R) = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})}\, R^{N-1}$.

– bitte wenden –

Unter Bezugnahme auf die Ergodenhypothese nehmen wir an, daß jeder Mikrozustand (Punkt $\vec{\tilde{p}}^2 \in \mathbb{S}^N$) des isolierten N-Teilchensystems – behandelt als mikrokanonisches Ensemble – gleichwahrscheinlich ist. Die Wahrscheinlichkeit $f(\tilde{p}_i)\, d\tilde{p}_i$ dafür, das i-te Teilchen mit der (Impuls-)Koordinate $\tilde{p}_i$ im Intervall $[\tilde{p}_i, \tilde{p}_i + d\tilde{p}_i]$ zu finden, ist proportional zu der Schnittfläche durch die N-Sphäre, als Menge aller Punkte $\vec{\tilde{p}}^2$ mit Impulskomponente $\tilde{p}_i$.

a) Zeigen Sie, daß die normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(\tilde{p}_i)$ durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung gegeben ist:

$$f(\tilde{p}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}}\, e^{-\frac{\tilde{p}_i}{2\epsilon}} \,, \qquad \int\limits_{-R}^{R} d\tilde{p}_i\, f(\tilde{p}_i) = 1\,. \tag{2}$$

$\epsilon = E/N$ ist die mittlere Energie pro Teilchen.

Hinweise:

- Besitzt das i-te Teilchen die Impulskoordinate $\tilde{p}_i$, so teilen sich die übrigen $(N-1)$ Teilchen die Energie $E' \equiv R'^2 = R^2 - \tilde{p}_i^2$.
- Die Menge aller Mikrozustände des $(N-1)$-Teilchensystems liegt auf der Oberfläche der $(N-1)$-Sphäre charakterisiert durch $\mathcal{S}_{N-1}(R')$.
- Bezugnehmend auf die hypersphärischen Koordinaten lässt sich die (Kartesische) Koordinate $\tilde{p}_i \in [-R, R]$ als ein weiterer (Polar-)Winkel θ beschreiben, der definiert ist über:
  $$R^2 \cos^2\theta = R^2 - \tilde{p}_i^2 \qquad \text{mit} \quad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,.$$
- Zeigen Sie, daß gilt:
  $$\mathcal{S}_N(R) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, R\, \mathcal{S}_{N-1}(R\cos\theta)\,. \tag{3}$$
  Um dies zu zeigen, verwenden Sie möglicherweise die Substitution $\xi = \sin\theta = \frac{\tilde{p}_i}{R}$, um das Integral $\int\limits_0^1 d\xi\,(1-\xi^2)^{\frac{N-1}{2}-1}$ auf die berühmte Euler'sche Beta-Funktion zurückzuführen:
  $$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 dx\, x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,.$$
- Identifizieren Sie mittels Gl. (3) und (2) zunächst die normierte Verteilung
  $$f_N(\tilde{p}_i) = \frac{C_N}{R}\,(1 - \frac{\tilde{p}_i^2}{R^2})^{\frac{N-3}{2}} \quad \text{mit} \quad C_N = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\Gamma(\frac{N-1}{2})}$$
  und überführen Sie diese im Grenzfall $N \to \infty$ in die Maxwell-Verteilung (2).

b) Berechnen Sie die Entropie $S = -Nk_B \int dp\, f(p)\, \ln(f(p))$ sowie die Temperatur T um letztlich die übliche Form für die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung (in einer Dimension) zu erhalten:

$$g(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\, k_B T}}\, e^{-\frac{m\, v^2}{2\, k_B T}}\,.$$

(Literaturhinweis: R. López-Ruiz, X. Calbet, American Journal of Physics, **75** (8), 752 (2007))