Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Thermodynamik + Statistik **WS 10/11**

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

11. Übung

1. **Homogenes Gasgemisch:**

   Betrachten Sie ein homogenes Gemisch von idealen, klassischen Gasen der Temperatur T in einem Kasten mit Volumen V. Das Gemisch bestehe aus N_1 Molekülen der Sorte 1, N_2 Molekülen der Sorte 2, ... und N_M Molekülen der Sorte M, so daß $N_1 + N_2 + \ldots + N_M = N$.

   Berechnen Sie aus dem kanonischen Zustandsintegral

$$Z(\beta, V, N_1, \ldots, N_M) = \frac{1}{N_1! \cdots N_M! (2\pi\hbar)^{3N}} \int d^{3N}q \int d^{3N}p \quad \exp\{-\beta H\}$$

   den Druck p, die Energie E und die Entropie S. Wie hängen p, E und S mit den entsprechenden Größen p_i, E_i und S_i eines Gases der Sorte i zusammen, die sich ergeben, wenn sich bei der Temperatur T nur die Sorte i im Kasten befände?

2. **Paramagnetismus — klassisch:**

   Betrachten Sie ein System aus N untereinander nicht wechselwirkenden klassischen Dipolen mit magnetischen Momenten $\vec{\mu}_i$ ($|\vec{\mu}_i| = \mu$ für $i = 1, \ldots, N$) in einem externen Magnetfeld der Stärke $\vec{\mathcal{H}}$. Die Energie $E_{m,i}$ eines magnetischen Dipols im externen Magnetfeld ist gegeben durch $E_{m,i} = \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mathcal{H}} = \mu \, \mathcal{H} \, \cos(\vartheta_i)$.

   a) Berechnen Sie den magnetischen Beitrag zum kanonischen Zustandsintegral $Z_m(T, \mathcal{H})$ für einen einzelnen Dipol und erläutern Sie, wie man daraus die mittlere magnetische Energie pro Dipol berechnet.

   b) Berechnen Sie aus Z_m das mittlere magnetische Gesamtmoment $\vec{M} := \langle \sum_i \vec{\mu}_i \rangle$.

3. **Paramagnetismus — quantenmechanisch:**

   Betrachten Sie die quantenmechanische Version des Systems aus Aufgabe 2: Die magnetischen Momente sind nun durch quantenmechanische Drehimpulse $\hbar\vec{J}$ verursacht; der Zusammenhang lautet $\vec{\mu} = g\mu_B\vec{J}$, wobei μ_B das Bohrsche Magneton und g der Landé-Faktor sind. Die Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl J soll für alle Teilchen des Systems gleich sein.

   a) Berechnen Sie den magnetischen Beitrag zur quantenmechanischen kanonischen Zustandssumme Z_m und daraus die mittlere magnetische ('Zeeman') Energie pro Teilchen $\langle E_m \rangle / N$. Geben Sie das Verhalten der Zeeman-Energie für niedrige ($k_B T \ll gJ\mu_B\mathcal{H}$) und hohe ($k_B T \gg gJ\mu_B\mathcal{H}$) Temperaturen an.

– bitte wenden –

b) Berechnen Sie aus Z_m das mittlere magnetische Gesamtmoment $\langle M \rangle$. Zeigen Sie, daß Sie das klassische Resultat aus Aufgabe 2b) erhalten, wenn Sie den Grenzübergang $\mu_B \to 0$ und $J \to \infty$ mit $\mu_B J = \text{const}$ durchführen. Diskutieren Sie das Verhalten des mittleren magnetischen Momentes für niedrige Temperaturen. Bestätigen Sie, daß für hohe Temperaturen das Curiesche Gesetz gilt, nach dem die magnetische Suszeptibilität $\chi = \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial \mathcal{H}}$ umgekehrt proportional zur Temperatur T ist.

c) Betrachten Sie den Spezialfall $J = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie aus der Zustandssumme die freie Energie und daraus die Entropie des Systems. Schreiben Sie die Entropie als Funktion der mittleren Energie. Erläutern Sie, weshalb es hier negative Temperaturen geben kann.

4. **Entropie eines Gummibands und entropische Kraft:**

Betrachten Sie ein Gummiband der Länge L, das mit einer Kraft f vorgespannt ist. Der Einfachheit wegen werde das Gummiband als eine eindimensionale (Polymer-)Kette mit N "Gliedern" der Länge ℓ modelliert. Jedes Glied ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder nach links oder nach rechts gerichtet (Binomialverteilung). Die (effektive) Länge der Kette ergibt sich dann zu $L = (n_+ - n_-)\ell \equiv m\,\ell$, wobei $n_\pm$ die Zahl der nach rechts/links gerichteten Kettenglieder ist. (Stellen Sie sich übereinanderliegende Kettenglieder einfach als Faltungen vor.) Machen Sie ferner von den üblichen Annahmen $n_\pm \gg 1$ und $|m| \ll N$ Gebrauch.

a) Wie groß ist die Zahl der Möglichkeiten (Zustandssumme) $\Omega_L \equiv \Omega(m, N)$, die sich für eine Kette der Länge $L = m\ell$ ergeben?

b) Verifizieren Sie, daß für die Entropiedifferenz der Kette als Funktion der Länge L gilt:

$$S(E, L) - S(E, L = 0) = -\frac{k_B\, L^2}{2N\ell^2}\,.$$

Gehen Sie dabei von der Proportionalität $\Omega(E, L) = \eta(E)\,\Omega_L$ für die Zustandssumme aus.

c) Begründen Sie, warum bei langsamen Veränderungen der Länge L des Bandes für das Entropie-Differential S dieses Systems $T\,dS = dU - f\,dL$ gilt.
Was ergibt sich für die *entropische* Kraft f, mit der das Gummiband gespannt ist?

Frohe Weihnachten und guten Rutsch ins neue Jahr!