



## 14. Übung

### 1. Fluktuationen in Quantengasen:

a) Leiten Sie den Ausdruck

$$(\Delta n_i)^2 = -k_B T \frac{\partial \langle n_i \rangle}{\partial \varepsilon_i}, \quad (\text{Quantenzahlen: } i \rightarrow (\vec{p}, s_z))$$

für die Fluktuation (Schwankung)  $\Delta n_i$  der Besetzungszahlen  $n_i$  eines Einteilchenzustands  $\varepsilon_i$  eines idealen Quantengases ab.

Was ergibt sich für die relative Schwankung  $\frac{(\Delta n_i)^2}{\langle n_i \rangle^2}$  in einem Fermi- und einem Bose-Gas?

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsmittelwerte  $\langle \vec{v} \rangle$  und  $\langle v^2 \rangle$  für ein nichtrelativistisches ideales Fermi-Gas bei Temperatur  $T = 0$ . Was ergibt sich für die relative Geschwindigkeitsschwankung?

### 2. Richardson-Effekt:

Um aus einer Metalloberfläche (z.B.  $(z = 0)$ -Ebene) auszutreten, müssen Elektronen eine Potentialbarriere (z.B.  $V_0(z) = V_0 \Theta(z)$ ) – bezogen auf die Fermi-Energie  $\varepsilon_F$  – überwinden. Für die Austrittsarbeit gilt typischerweise  $V_0 \gg k_B T$ .

Behandeln Sie die Elektronen als ideales Fermi-Gas und berechnen Sie die Stromdichtekomponente  $j_z = (-e)n\langle v_z \rangle$ . Verifizieren Sie den Ausdruck für die stark temperaturabhängige Stromdichte:

$$j_z = \frac{-em}{2\pi^2 \hbar^3} (k_B T)^2 e^{-V_0/(k_B T)}.$$

### 3. Temperaturkorrektur zum Paramagnetismus:

Die Einteilchenenergien von Elektronen eines idealen Fermi-Gases im homogenen Magnetfeld  $B$  seien durch  $\varepsilon_{\pm} = \frac{p^2}{2m} \mp \mu_B B$  gegeben. Führen Sie chemische Potentiale  $\mu_{\pm} = \mu \pm \mu_B B$  für parallel (+) und antiparallel (–) zum Magnetfeld eingestellte magnetische Momente ein.

a) Leiten Sie für den Tieftemperaturlimites  $\beta \tilde{\mu} \gg 1$  die Näherungsformel her (Sommerfeld-Entwicklung):

$$\int_0^{\infty} d\varepsilon F(\varepsilon) \langle n(\varepsilon) \rangle = \int_0^{\tilde{\mu}} d\varepsilon F(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6\beta^2} F'(\tilde{\mu}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta^4}\right), \quad (1)$$

wobei  $\tilde{\mu}$  das chemische Potential bezeichnet. Es sind diverse Wege der Herleitung möglich. Führen Sie eine Funktion  $\eta(x)$  (Variable  $x = \beta(\varepsilon - \mu)$ ) ein  $\langle n(x) \rangle = \eta(x) + \Theta(-x)$ , indem Sie den  $T = 0$ -Anteil explizit abspalten. Werten Sie die Beiträge zum Integral (1) dann separat aus.

- b) Berechnen Sie nun mittels der Sommerfeld-Entwicklung (1) die Anzahl  $N_{\pm}$  der parallel und antiparallel eingestellten magnetischen Momente bis zur Ordnung  $T^2$  unter der Annahme  $k_B T \ll \varepsilon_F$  und  $\mu_B B \ll \varepsilon_F$  (bzw.  $\beta \mu_{\pm} \gg 1$ ) und daraus nocheinmal die Suszeptibilität.

#### 4. Virialentwicklung für ein klassisches Gas:

Für ein klassisches (monoatomares) verdünntes Gas läßt sich die großkanonische Zustandssumme  $Y(T, V, \mu)$  in eine Potenzreihe nach dem Virial  $z = e^{\beta \mu} \ll 1$  entwickeln:

$$Y(T, V, \mu) = \text{Tr}\{e^{-\beta H} e^{\beta \mu N}\} = \sum_{N=1}^{\infty} Z(T, V, N) e^{\beta \mu N} \equiv \sum_{N=1}^{\infty} Z_N z^N$$

Das Tr-Symbol steht hier für multidimensionale Integration über die Phasenraumkoordinaten aller Gasatome. Die Faktoren  $Z_N$  bezeichnen kanonische Zustandssummen für ein  $N$ -Teilchensystem mit der Hamilton-Funktion

$$H = H(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|).$$

Wechselwirkungseffekte – hier werden Paarkräfte  $W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$  als dominierende Wechselwirkung angenommen – treten zuerst in der Zweiteilchenzustandssumme  $Z_2$  auf. Somit ist zu erwarten, daß sich Abweichungen vom idealen Gasverhalten auf den dominanten Anteil der Paarwechselwirkung zurückführen lassen (siehe Van-der-Waalsche Zustandsgleichung).

- a) Zeigen Sie, daß für das großkanonische Potential  $\Omega(T, V, \mu)$  bis zur 2. Ordnung in  $z$  resultiert:

$$-\Omega(T, V, \mu) = k_B T \ln [Y(T, V, \mu)] = p(T, V, \mu) V \simeq k_B T \left\{ Z_1 z + \left( Z_2 - \frac{Z_1^2}{2} \right) z^2 \right\}.$$

Mit Hilfe der Relation  $N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \frac{\partial(pV)}{\partial \mu}$  läßt sich nun das Virial  $z$  bzw. das Produkt  $(Z_1 z)$  durch die Teilchenzahl  $N$  ausdrücken. Verifizieren Sie, daß man (bis Terme  $\mathcal{O}(N^2)$ )  $Z_1 z = N - 2 \left( \frac{Z_2}{Z_1^2} - \frac{1}{2} \right) N^2$  und damit den Zusammenhang  $p = k_B T n [1 + B_2(T) n]$  zwischen Druck  $p$  und Teilchenzahldichte  $n = \frac{N}{V}$  erhält.  $B_2(T) = -V \left( \frac{Z_2}{Z_1^2} - \frac{1}{2} \right)$  definiert den 2. Virialkoeffizienten.

- b) Berechnen Sie die Ein- und die Zweiteilchenzustandssumme  $Z_1$  und  $Z_2$  und zeigen Sie, daß gilt:

$$B_2(T) = -\frac{1}{2} \int d^3 r (e^{-\beta W(r)} - 1) = -2\pi \int_0^{\infty} dr r^2 (e^{-\beta W(r)} - 1), \quad r = |\vec{r}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|.$$

- c) Berechnen Sie  $B_2(T)$  näherungsweise für das phänomenologische Potential

$$W(r) = 4\epsilon \left\{ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right\} \quad \text{mit } \epsilon > 0 \text{ und verifizieren Sie das Resultat:}$$

$$B_2(T) = b - \frac{a}{k_B T} \text{ mit den Parametern } b \simeq \frac{2\pi}{3} r_0^3 \text{ und } a \simeq \epsilon \frac{8\pi}{3} r_0^3 = 4\epsilon b.$$

Was ergibt sich somit für  $pV$ ?

- d) Überlegen Sie sich schließlich eine Interpolation, die auf die Van-der-Waalsche Zustandsgleichung führt.