Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. W. Strunz
PD Dr. G. Plunien

Thermodynamik + Statistik **WS 10/11**

http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

13. Übung

1. **Zur Bose-Einstein Kondensation in $d = 3$ Dimensionen:**

Wie in der Vorlesung gezeigt, ist in einem idealen Bose-Gas im Kasten $V = L^3$ unterhalb einer kritischen Temperatur T_c der Grundzustand mit $\varepsilon_0 = 0$ makroskopisch besetzt ($\langle N\rangle_0 \gg 1$) und muß daher gesondert behandelt werden, z.B.:

$$\langle N\rangle = \langle N_0\rangle + \sum_{\vec{k}\neq 0}\langle n_{\vec{k}}\rangle = \langle N_0\rangle + \langle N\rangle_{\text{Rest}}\,, \qquad \langle n_{\vec{k}}\rangle = \left(e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)} - 1\right)^{-1}\,.$$

Es stellt sich die Frage, ob eventuell nicht noch weitere tiefliegende Zustände, beispielsweise ein erster angeregter Zustand mit Energie ε_1, gesondert behandelt werden müssen.

a) Bestimmen Sie die Energie ε_1 des ersten angeregten Zustands. Wie viele Einteilchenzustände mit der Energie ε_1 gibt es (Entartungsgrad)?

b) Wie skaliert ε_1 mit dem Volumen V und damit im thermodynamischen Limes ($\langle N\rangle, V \to \infty$, wobei $\frac{\langle N\rangle}{V} = const.$) mit der Teilchenzahl $\langle N\rangle$?

c) Bestimmen Sie dazu die mittlere Besetzungszahl $\langle n_1\rangle$ eines angeregten Zustands mit der Energie ε_1 für große $\langle N\rangle$ und zeigen Sie, daß in der Tat der Beitrag $\langle n_1\rangle$ gegenüber $\langle N_0\rangle$ vernächlässigbar ist.

2. **Bose-Gas in $d = 2$ im Kastenpotential :**

Verifizieren Sie, daß die Bestimmungsgleichung für die Fugazität $z = e^{\beta\mu}$ eines idealen (nichtwechselwirkenden) Bose-Gases im Kastenpotential ($V = L^d$) bei der Temperatur T die Form

$$\frac{\lambda^d}{V}\langle N\rangle = \frac{\lambda^d}{V}\frac{z}{1-z} + g_{d/2}(z)\,, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mK_BT}}\,, \qquad g_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^\alpha}\,,$$

wobei λ die thermische de Broglie-Wellenlänge und $g_\alpha(z)$ die Bose-Funktion bezeichnet. Der erste Term resultiert aufgrund der gesonderten Behandlung des Grundzustands, der in $d = 3$ Dimensionen unterhalb T_c makroskopisch besetzt ist ($\langle N_0\rangle = \frac{z}{1-z} \gg 1$).

a) Zeigen Sie, daß im Kastenpotential in $d = 2$ Dimensionen keine Bose-Einstein Kondensation stattfindet, d.h. im thermodynamischen Limes gilt: $\frac{\langle N_0\rangle}{V} \to 0$.
(Hinweis: $g_1(z) = -\ln(1-z)$.)

b) Geben Sie (für $d = 2$) die Besetzungszahl des Grundzustands $\langle N_0\rangle$ im thermodynamischen Limes für tiefe Temperaturen $\lambda^2\frac{\langle N\rangle}{V} \gg 1$ an.

– bitte wenden –

3. **Ideale Quantengase und klassischer Grenzfall:**

Berechnen Sie für ein ideales Fermi-/Bose-Gas (großkanonisches Ensemble im Kastenpotential mit $V = L^3$) die ersten Korrekturen gegenüber dem klassischen Grenzfall (Fugazität $z = e^{\beta\mu} \ll 1$). Zwischen dem großkanonischen Potential (Gibbs'sche freie Energie) $\Omega = \Omega(T, \mu, V)$, dem Druck $p = p(T, \mu)$ und der Energie $E = E(T, \mu, V)$ besteht der Zusammenhang:

$$\Omega(T, \mu, V) = -p(T, \mu)\, V = -\frac{2}{3}\, E(T, \mu, V) = -\frac{2}{3}\, k_B T\, \frac{V g_s}{(2\pi)^2} \left(\frac{2 m k_B T}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int\limits_0^\infty dx\, \frac{x^{3/2}}{e^{x-\beta\mu} \pm 1}\,,$$

wobei $g_s = 2s + 1$ der Spinentartungsfaktor ist.

a) Berechnen Sie die Energie $E(T, \mu, V)$ für $z \ll 1$.

b) Berechnen Sie die Teilchenzahl $N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}$ (für $z \ll 1$) und drücken Sie die Fugazität durch die Teilchenzahl N aus.

c) Entwickeln Sie nun die Energie $E(T, N, V)$ und den Druck $p(T, N, V)$ bis zur 2. Ordnung in N. Diskutieren Sie die Auswirkung der Quantenstatistik auf die Zustandsgleichung.