Theoretische Elektrodynamik WS 2011/2012

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

1. Übung

1. **Lorentz-Transformationen:**

Die Transformationskoeffizienten $L^\mu{}_\alpha = \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}$, mit denen die Weltkomponenten x^α eines Weltereignisses $\underline{x}$ bezüglich des Inertialsystems I in die entsprechenden Komponenten x'^μ bezüglich Inertialsystems I', das sich mit der Geschindigkeit $\vec{v}$ relativ zu I bewegt, gemäß $x'^\mu = L^\mu{}_\alpha\, x^\alpha$ (Einsteinsche Summenkonvention!) umgerechnet werden, lauten explizit:

$$\begin{aligned} L^0{}_0 &= \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad v^2 = \vec{v}^{\,2} = -v^i v_i\,, \quad v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = (v^0 = c, \vec{v}) \\ L^i{}_0 &= \gamma\,\frac{v^i}{c}\,, \qquad L^0{}_i = -\gamma\,\frac{v_i}{c}\,, \\ L^i{}_j &= \delta^i_j - (\gamma-1)\,\frac{v^i v_j}{v^2} \end{aligned}$$

a) Wie schreiben sich dann die Koeffizienten $L_\mu{}^\alpha = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\, L^\nu{}_\beta$, wenn Sie das Heben und Senken von Indizes durch Überschieben mit den metrischen Koeffizienten $((g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1))$ vornehmen?

b) Zeigen Sie die Eigenschaften der Lorentz-Transformationen

$$L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta\, g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}\,, \quad L^\alpha{}_\mu L_\alpha{}^\nu = \delta^\nu_\mu\,.$$

(Hinweis: Betrachten Sie separat die Fälle $\mu = \nu = 0$ bzw. $\mu = \nu = k$.)

c) Notieren Sie explizit die Transformationsgleichungen $x'^\mu = L^\mu{}_\alpha\, x^\alpha$ für die Weltkoordinaten für den Fall einer Relativbewegung in $x^1 \equiv x$-Richtung.

2. **Relativistische Dynamik:**

Ein Punktteilchen mit Ruhemasse m_0 bewege sich in der Minkowski-Raumzeit unter dem Einfluß einer externen Viererkraft $\underline{K}$ entlang einer Weltlinie $\underline{x}(\tau)$ mit der Vierergeschindigkeit $\underline{u}(\tau) = \frac{d}{d\tau}\underline{x}(\tau)$. Das Eigenzeitintervall $d\tau$ ist über das invariante Linienelement $ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu$ definiert. Bezüglich eines Inertialsystems habe das Teilchen die Weltkoordinaten $x^\mu(\tau) = (x^0(\tau) = ct(\tau), \vec{x}(\tau))$ sowie die Vierergeschwindigkeit $u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$. Der Viererimpuls ist gemäß $\underline{p}(\tau) = m_0\underline{u}(\tau)$ definiert und besitzt die Komponentendarstellung $p^\mu = (p^0 = \frac{E}{c}, \vec{p})$.

Die Lorentz-kovariante Grundgleichung der Punktmechanik lautet:

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu(\tau) = K^\mu(\underline{x}(\tau), \underline{u}(\tau))\,, \qquad \frac{d}{d\tau}p^0(\tau) = K^0(\underline{x}(\tau))\,, \quad \frac{d}{d\tau}\vec{p}(\tau) = \vec{K}(\underline{x}(\tau))\,. \tag{1}$$

Hierbei sind die Komponenten der Minkowski-Kraft K^μ Funktionen der Teilchenkoordinaten (x^μ) und -geschwindigkeiten (u^μ).

a) Zeigen Sie, daß die Vierergeschwindigkeit u^μ immer orthogonal zur Viererbeschleunigung $\frac{du^\mu(\tau)}{d\tau}$ ist, d.h. $u_\mu \frac{du^\mu(\tau)}{d\tau} = 0$ gilt.
(Hinweis: $\underline{a}\cdot\underline{b} = g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu = a_\nu b^\nu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 + g_{ij}a^i b^j = a^0 b^0 - a^i b_i = a^0 b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b}$).

– bitte wenden –

b) Zeigen Sie, daß immer gilt: $K^\mu u_\mu = 0$. Welche Dispersionsrelation (Energie-Impulsrelation) $E = E(\vec{p})$ ergibt sich für Teilchen mit Ruhemasse m_0?

c) Vollziehen Sie ausgehend von dem Dreiervektoranteil der Bewegungsgleichung (1) den Übergang zur "Newtonschen Form" der Bewegungsgleichung $m_0 \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = m_0\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$, indem Sie Ableitungen nach der Eigenzeit τ durch Ableitungen nach der Koordinatenzeit t ausdrücken (Kettenregel: $\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} = \gamma(v)\frac{d}{dt} = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}$).

Leiten Sie zunächst die exakte Form

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = m_0\gamma^2 \,\mathcal{A} \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{K} \quad \text{mit der Dyade} \quad \mathcal{A} = \left(\mathbf{1} + \gamma^2 \,\frac{\vec{v} \circ \vec{v}}{c^2}\right) \quad \text{her}\,.$$

Bestimmen Sie eine geeignete inverse Dyade $\mathcal{A}^{-1} = a\mathbf{1} + b\,\vec{v} \circ \vec{v}$ und lösen Sie obige Gleichung nach der "Newtonschen Beschleunigung" $\ddot{\vec{x}}$ bzw. $\dot{\vec{v}}$ auf.

Welcher Ausdruck resultiert somit für den Dreiervektor $\vec{F}$ in Abhängigkeit von dem Dreiervektoranteil $\vec{K}$ der Minkowski-Kraft?

3. **Relativistische Wirkung:**

Die Euler-Lagrange Gleichungen für die Weltlinie $\underline{x}(\tau)$ (Komponenten $x^\mu(\tau)$) eines punktförmigen, geladenen Teilchens (Ruhemasse $m_0 > 0$, Ladung q) in externen elektromagnetischen Feldern resultieren aus dem Lorentz-invarianten Wirkungprinzip

$$\delta S[\underline{x}] = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, L(\underline{x}, \underline{u}) = 0\,, \quad \text{wobei} \quad \delta\underline{x}(\tau_1) = \delta\underline{x}(\tau_2) = 0 \quad \text{gilt.}$$

Elektromagnetische Felder werden durch den Vierervektor $A_\alpha(\underline{x})$ (elektromagnetische Potentiale) beschrieben, die an den Ladungsstrom $J^\alpha = qu^\alpha$ des Teilchens "minimal" ankoppeln.

a) Begründen Sie, warum die Lagrange-Funktion

$$L(\underline{x}, \underline{u}) = L_0(\underline{u}) + L_{\text{int}}(\underline{x}, \underline{u}) = -m_0 c \sqrt{u^\alpha(\tau) u_\alpha(\tau)} - qA_\alpha(\underline{x}(\tau))u^\alpha(\tau) \tag{2}$$

ein denkbar einfachster Kandidat darstellt.

b) Leiten Sie die entsprechenden Euler-Lagrange Gleichungen her. Was ergibt sich für die Minkowski-Kraft K^μ?

c) Überprüfen Sie, ob die Bedingung $K^\mu u_\mu = 0$ erfüllt wird.

d) Leiten Sie die Hamilton-Funktion $H = p^\mu u_\mu - L$ her.