Theoretische Elektrodynamik WS 2011/2012

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

10. Übung

1. **Vektorpotential eines stromdurchflossenen Ringes:**

   Ein Kreisstrom I fließt in einem unendlich dünnen Drahtring mit Radius a, welcher in der xy-Ebene liegt (siehe Abbildung).

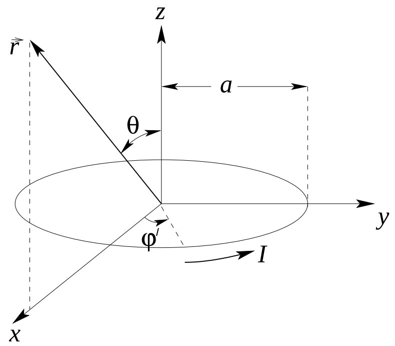
   a) Überlegen Sie sich, dass die Stromdichte in Polarkoordinaten gegeben ist durch

   $$\vec{j}(\vec{r}\,') = \frac{I}{a}\delta(\cos\theta')\delta(r' - a)\,\vec{e}_{\varphi'}\,.$$

   b) Verifizieren Sie, dass die Kontinuitätsgleichung für die Strom- und Ladungsdichte erfüllt ist.

   c) Berechnen Sie ausgehend von der allgemeinen Integraldarstellung das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ näherungsweise für $r \gg a$.

   Hinweis: Wegen der Zylindersymmetrie des Problems kann man den Beobachtungspunkt $\vec{r}$ in die xz-Ebene legen, um die Rechnung zu vereinfachen. Entwickeln Sie den Integranden in a/r.



2. **Ohmsches Gesetz:**

   Gehen Sie von dem linearen Zusammenhang $\vec{j} = \sigma\,\vec{E}$ zwischen der Stromdichte $\vec{j}$ innerhalb eines Leiters mit der Leitfähigkeit σ und der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ aus. Zeigen Sie, dass unter bestimmten Voraussetzungen die integrale Form des Ohmschen Gesetzes $U = RI$ hergeleitet werden kann. Dabei bezeichnet U die Potentialdifferenz $\phi_2 - \phi_1$ zwischen zwei Leiterpunkten, R den Widerstand zwischen den entsprechenden Punkten und I den durch den Leiter fließenden Strom.

– bitte wenden –

3. **Maxwellscher Verschiebungstrom am Kondensator:**

Betrachten Sie die Entladung eines Plattenkondensators (Fläche A) über eine Leiterschleife. Während des Entladevorgangs ist der Leiter von einem zeitabhängigen Magnetfeld $\vec{B}(t)$ umgeben und zwischen den Kondensatorplatten verringert sich die elektrische Feldstärke $\vec{E}(t)$. Argumentieren Sie mit Hilfe des Ampèreschen Gesetzes (geeignete Wahl von Hüllflächen und Randkurven), dass die Einführung des Maxwellschen Verschiebungsstroms zwingend erforderlich ist, um die Ladungserhaltung zu gewährleisten.

4. **Elektromagnetische Wellen:**

Die quellenfreien Maxwell-Gleichungen für elektromagnetische Felder im Vakuum lauten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = 0\,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) = 0\,,$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) = 0\,, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0\,.$$

a) Leiten Sie die homogenen Wellengleichungen her:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\vec{E}(\vec{r},t) - \Delta\,\vec{E}(\vec{r},t) = 0\,, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\vec{B}(\vec{r},t) - \Delta\,\vec{B}(\vec{r},t) = 0\,. \tag{1}$$

b) Welche Beziehung (Dispersionsrelation) muß zwischen der Kreisfrequenz ω und dem Wellenzahlvektor $\vec{k}$ gelten, damit monochromatische ebene Wellen der Form $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\,e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ bzw. $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\,e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ ($\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ seien konstante Amplituden) Lösungen der Wellengleichungen (**??**) sind?

c) Zeigen Sie mit Hilfe der obigen Maxwell-Gleichungen, dass die Transversalitätsbedingungen $\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$ und $\vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0$ gelten.

d) Zeigen Sie, dass ferner $\vec{E}_0$ senkrecht zu $\vec{B}_0$ bzw. $\vec{k}$ parallel zu dem Vektor $\vec{E}_0 \times \vec{B}_0$ ist. (Die Vektoren $\{\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}\}$ bilden somit ein vollständiges, orthogonales Basissystem.)

e) Wie lauten die jeweiligen Inhomogenitäten zu den Wellengleichungen (**??**) bei Anwesenheit von elektromagnetischen Quellen $\varrho(\vec{r},t)$ und $j(\vec{r},t)$?
(Analoge Herleitung mittels der allgemeinen Maxwell-Gleichungen.)