Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

---

11. Übung

1. **Der Magnetschwebekreisel:**

Bei einem Magnetschwebekreisel ("Levitron") handelt es sich um ein spinstabilisiertes Schweben eines Permanentmagneten. Ein rotierender Ringmagnet, eingearbeitet in einen Kreisel (mit Trägheitsmoment I), schwebt über einer Basis aus einem großen Ringmagneten. Dabei stehen sich gleiche Pole gegenüber. In der Nähe des Levitationspunkts $\vec{r}_0$ sei das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ des Ringmagneten zylindersymmetrisch und das magnetische Moment des Kreisels (in nullter Ordnung) gegeben durch $\mu(\vec{r},t) \simeq \mu(\vec{r}_0,t) \equiv \mu(t)$ mit $|\vec{\mu}(t)| = \mu = const$. Die Rotation des Kreisels verhindert ein seitliches Ausbrechen. Der Magnetkreisel kippt nicht, weil er wie im Gravitationsfeld seitlich ausweicht und eine Präzessionsbewegung um das lokale Magnetfeld ausführt. Die Präzessionsfrequenz ist gegeben durch $\vec{\omega}_p = -\frac{\mu\vec{B}}{I\omega}$. Der Levitationseffekt ist nur möglich, wenn sich der Kreisel in einem bestimmten Frequenzbereich ω dreht.

a) Leseübung: Grundlegende Aspekte der Physik des Levitron entnehmen Sie den Arbeiten

[1] M.V. Berry, *The Levitron^{TM}: an adiabatic trap for spins*, Proceedings of the Royal Society (London) **452** (1996) p. 1207 - 1220

[2] M.D. Simon, L.O. Heflinger, S.L. Ridgway, *Spin stabilized magnetic levitation*, American Journal of Physics **65** (1997) p. 286 - 292

b) Begründen Sie die Bewegungsgleichungen $\dot{\vec{\mu}}(t) = \frac{\mu}{I\omega}\,\vec{\mu}\times\vec{B}(\vec{r}\,)$ und $m\,\ddot{\vec{r}} = \vec{\nabla}(\vec{\mu}(t)\cdot\vec{B}(\vec{r}\,)) - mg\,\vec{e}_z$ (Gln. (1) und (2) aus Ref. [2]).

c) Welche Einschränkungen für die magnetische Levitation werden durch das Earnshaw-Theorem gesetzt?

d) Für die magnetische Levitation ist die Abhängigkeit der potentiellen Energie des Kreisels vom Betrag des lokalen Magnetfeldes $B(\vec{r}\,)$ essentielle Voraussetzung (siehe Gl. (4) in [2]). Vollziehen Sie die Stabilitätsuntersuchungen (siehe Gln. (5) bis (10) in [2]) ausgehend von der potentiellen Energie Gl. (4) des Kreisels nach. Konsultieren Sie auch entsprechende Kapitel aus der Arbeit [1].

2. **D'Alembertsche Lösung der Wellengleichung:**

Es soll die d'Alembertsche Lösung der Wellengleichung für ein Lorentz-Skalarfeld $u(x,t)$ in einer $1+1$-dimensionalen Raumzeit

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) \;=\; \Box u(x,t) = 0\,, \tag{1}$$

für die Anfangsbedingungen $\qquad u(x,0) = f(x)\,,\quad \partial_t u(x,t)\Big|_{t=0} \equiv \dot{u}(x,0) = g(x)\,.$

hergeleitet werden.

a) Überzeugen Sie sich zunächst von der Invarianz der Wellengleichung unter Lorentz-Transformationen: $\Box u(x,t) = 0 \longrightarrow \Box' u(x',t') = 0$.

– bitte wenden –

b) Transformieren Sie nun die Wellengleichung (1) von den Minkowski-Koordinaten $x^0 = ct$ und $x^1 = x$ auf die Lichtkegelkoordinaten $x^+ = x + ct$ und $x^- = x - ct$.
Verifizieren Sie, dass das Skalarfeld $\phi(x^-, x^+) \equiv u(x,t)$ die transformierte Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = 0 \quad \longrightarrow \quad 4\,\frac{\partial^2 \phi(x^-, x^+)}{\partial x^- \partial x^+} = 0 \qquad \text{erfüllt.} \tag{2}$$

c) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Wellengleichung (2) die Gestalt besitzt:

$$\phi(x^-, x^+) = \xi(x^-) + \eta(x^+) \quad \text{bzw.} \quad u(x,t) = \xi(x - ct) + \eta(x + ct)\,.$$

Interpretieren Sie die Zeitentwicklung der beiden Lösungen $\xi(x - ct)$ und $\eta(x + ct)$ für $t > 0$. (Beispielsweise sei $u(x,0) \sim e^{-x^2}$ als Anfangsbedingung gegeben).

d) Bestimmen Sie nun die Lösung $u(x,t)$ der Wellengleichung (1), indem Sie zuerst Lösungen $u_{1/2}(x,t)$ zu den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u_1(x,0) &= f(x)\,, \quad u_2(x,0) = 0 \\ \dot{u}_1(x,0) &= 0\,, \qquad \dot{u}_2(x,0) = g(x) \end{aligned}$$

konstruierenen und diese superponieren. Als Ergebnis resultiert die d'Alembertsche Form der allgemeinen Lösung: $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} dy\, g(y)$.

3. **Ausbreitungskern der Wellengleichung für ein Skalarfeld:**

Untersuchen Sie die Lösungen $u(\vec{r},t)$ der skalaren Wellengleichung in 3+1 Dimensionen

$$\Box u(\vec{r},t) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u(\vec{r},t) = 0\,, \quad \text{mit} \quad u(\vec{r},0) = u_0(\vec{r})\,,\ \dot{u}(\vec{r},0) = v_0(\vec{r}).$$

a) Zeigen Sie, dass $u(\vec{r},t) = \displaystyle\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left\{\alpha(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + \beta(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t)}\right\}$ mit $\omega = c|\vec{k}|$ Lösung der Wellengleichung ist.

b) Die Fourier-Transformierten $\widetilde{u}_0(\vec{k})$ und $\widetilde{v}_0(\vec{k})$ der Anfangsbedingungen $u_0(\vec{r})$ und $v_0(\vec{r})$ sind über $\left\{\begin{array}{c} \widetilde{u}_0(\vec{k}) \\ \widetilde{v}_0(\vec{k}) \end{array}\right\} = \displaystyle\int \frac{d^3r}{(2\pi)^{3/2}} \left\{\begin{array}{c} u_0(\vec{r}) \\ v_0(\vec{r}) \end{array}\right\} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ definiert.
Drücken Sie α und β durch $\tilde{u}_0$ und $\tilde{v}_0$ aus.

c) Der Ausbreitungskern $D(\vec{r},t)$ der skalaren Wellengleichung ist eine Lösung der homogenen Wellengleichung $\Box D(\vec{r},t) = 0$ zu den speziellen Anfangsbedingungen $D(\vec{r},0) = 0$ und $\dot{D}(\vec{r},0) = \delta(\vec{r})$. Zeigen Sie, dass das Faltungsintegral

$$u(\vec{r},t) = \int d^3r' \left\{u_0(\vec{r}\,')\, \dot{D}(\vec{r} - \vec{r}\,', t) + v_0(\vec{r}\,')\, D(\vec{r} - \vec{r}\,', t)\right\}$$

die Lösung $u(\vec{r},t)$ zu den gegebenen Anfangsbedingungen darstellt.

d) Bestimmen Sie den Ausbreitungskern $D(\vec{r},t)$ über die Fourier- Darstellung entsprechend zu Teil a) der Aufgabe. (Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Fourier-Transformierten der Anfangsbedingungen $D(\vec{r},0)$ und $\dot{D}(\vec{r},0)$.)

***** Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr! *****